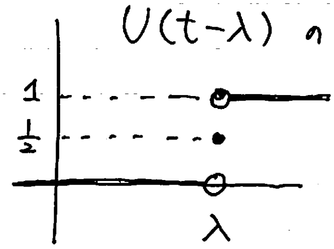
単位関数とガンマ関数.

$\lambda > 0$ に対し.

$$U(t-\lambda) = \begin{cases} 0 & t<\lambda \\ \frac{1}{2} & t=\lambda \\ 1 & t>\lambda \end{cases}$$

$U(t-\lambda)$ のグラフ.



で定義される関数を単位関数という.

また, $\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{s-1}\,dt$ をガンマ関数という.

この積分は $s>0$ で収束し.

$\Gamma(1)=1$, $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

$\Gamma(s+1)=s\cdot\Gamma(s)$ が成り立つ.

とくに. $\Gamma(n)=(n-1)!$ である (nは自然数)

$\because$ $\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}\,dt = -\left[e^{-t}\right]_0^\infty = 1$ である

$$\Gamma(s+1)=\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^s\,dt = \left[-e^{-t}t^s\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}\cdot s\cdot t^{s-1}\,dt$$
$$= s\,\Gamma(s)$$ である

問題 (1) $L(U(t-\lambda))$ を求めよ.

(2) $L(t^\lambda)$ $(\lambda>-1)$ をガンマ関数を使って表せ.

(3) $L(t^n)$ (nは自然数) を求めよ

答 (1) $\int_0^\infty e^{-st}U(t-\lambda)\,dt = \int_\lambda^\infty e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_\lambda^\infty$

$$= \frac{e^{-s\lambda}}{s}$$ である

No.

(2). $L(t^\lambda)=\int_0^\infty e^{-st}t^\lambda dt$ であるが．

ここで $z=st$ とおいて変数変換をすると $dz=s\cdot dt$ より

$$L(t^\lambda)=\int_0^\infty e^{-z}\cdot\left(\frac{z}{s}\right)^\lambda\cdot\frac{1}{s}dz$$

$$=\frac{1}{s^{\lambda+1}}\cdot\int_0^\infty e^{-z}z^\lambda dz=\frac{1}{s^{\lambda+1}}\Gamma(\lambda+1)$$ である

(3) (2) より $L(t^n)=\frac{1}{s^{n+1}}\Gamma(n+1)=\frac{n!}{s^{n+1}}$ である．

ラプラス変換の基本法則

1. 線形法則．

$$L(af(t)+bg(t))=a\cdot F(s)+bG(t)$$

$\because$ $L(af(t)+bg(t))=\int_0^\infty e^{-st}(af(t)+bg(t))dt$

$=a\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt+b\int_0^\infty e^{-st}\cdot g(t)dt$

$=a\cdot F(s)+bG(s)$

2. 相似法則．

$$L(f(\lambda t))=\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{s}{\lambda}\right)\quad(\lambda>0)$$

$\because$ $L(f(\lambda t))=\int_0^\infty e^{-st}\cdot f(\lambda t)dt$．

ここで．$\tau=\lambda t$ として変数変換すると． $d\tau=\lambda\cdot dt$ より

$$L(f(\lambda t))=\int_0^\infty e^{-s\cdot\frac{\tau}{\lambda}}\cdot f(\tau)\cdot\frac{1}{\lambda}d\tau$$

$$=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{\lambda}\cdot\tau}f(\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{s}{\lambda}\right)$$

問題. 次の関数のラプラス変換を求めよ.

(1). at^2+bt+c　(2) $\frac{1}{\sqrt{\lambda t}}$ $(\lambda>0)$　(3) $(2t)^\lambda$ $(\lambda>-1)$

答 (1) $L(t^n)=\frac{n!}{s^{n+1}}$ より

$$L(at^2+bt+c)=a\cdot L(t^2)+bL(t)+cL(1)$$
$$=\frac{2a}{s^3}+\frac{b}{s^2}+\frac{c}{s}$$ である

(2) $L\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$ より.

$$L\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda t}}\right)=\frac{1}{\lambda}\cdot F\left(\frac{s}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{s}{\lambda}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda s}}$$ である

(3). $L(t^\lambda)=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{s^{\lambda+1}}$ より

$$L((2t)^\lambda)=2^\lambda\cdot L(t^\lambda)=\frac{2^\lambda\cdot\Gamma(\lambda+1)}{s^{\lambda+1}}$$ である.

もしくは

$$L((2t)^\lambda)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\left(\frac{s}{2}\right)^{\lambda+1}}=\frac{2^\lambda\cdot\Gamma(\lambda+1)}{s^{\lambda+1}}$$ としてもよい.

$f(t)$ を λ $(\lambda>0)$ だけ平行移動させ、$0\leqq t<\lambda$ では 0 であるようなグラフは.

$U(t-\lambda)f(t-\lambda)$ で表される. これを簡単に $f(t-\lambda)$ とかく.

また. $f(t)$ を $-\lambda$ だけ平行移動させ. $t<0$ で 0 であるようなグラフは.

$U(t)f(t+\lambda)$ で表される. これも簡単に $f(t+\lambda)$ とかく.

No.

3. 第1移動法則.

$$L(f(t-\lambda)) = e^{-\lambda s}\cdot F(s) \qquad (\lambda>0)$$

$\because$ $L(f(t-\lambda)) = \int_0^\infty e^{-st}\cdot f(t-\lambda)\,dt = \int_\lambda^\infty e^{-st}\cdot f(t-\lambda)\,dt$.

ここで. $t-\lambda=\tau$ とおくと. $dt=d\tau$ より

$$\begin{aligned} L(f(t-\lambda)) &= \int_0^\infty e^{-s(\tau+\lambda)}\cdot f(\tau)\,d\tau \\ &= e^{-\lambda s}\cdot \int_0^\infty e^{-s\tau}\cdot f(\tau)\,d\tau \\ &= e^{-\lambda s}\cdot F(s) \end{aligned}$$

である.

4. 第2移動法則.

$$L(f(t+\lambda)) = e^{\lambda s}\left(F(s) - \int_0^\lambda e^{-st} f(t)\,dt\right) \qquad (\lambda>0)$$

$\because$ $L(f(t+\lambda)) = \int_0^\infty e^{-st}\cdot f(t+\lambda)\,dt$.

ここで $t+\lambda=\tau$ とおくと. $dt=d\tau$ より

$$\begin{aligned} L(f(t+\lambda)) &= \int_\lambda^\infty e^{-s(\tau-\lambda)}\cdot f(\tau)\,d\tau \\ &= e^{\lambda s}\cdot \int_\lambda^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau \\ &= e^{\lambda s}\left(\int_0^\infty e^{-s\tau}\cdot f(\tau)\,d\tau - \int_0^\lambda e^{-s\tau}\cdot f(\tau)\,d\tau\right) \\ &= e^{\lambda s}\left(F(s) - \int_0^\lambda e^{-st}\cdot f(t)\,dt\right) \end{aligned}$$

<u>問題</u> 次の関数 の $f(t-\lambda)$ と $f(t+\lambda)$ のラプラス変換を求めよ.

(1) $f(t)=t$ (2) $f(t)=e^t$

No.

答 (1) $L(t)=\frac{1}{s^2}$ より.

$$L(f(t-\lambda))=\frac{e^{-\lambda s}}{s^2}$$

$$L(f(t+\lambda))=e^{\lambda s}\cdot\left(\frac{1}{s^2}-\int_0^{\lambda}e^{-st}\cdot t\,dt\right)$$

$$=e^{\lambda s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\left[e^{-st}\cdot t\right]_0^{\lambda}-\frac{1}{s}\int_0^{\lambda}e^{-st}dt\right)$$

$$=e^{\lambda s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\cdot e^{-\lambda s}\cdot\lambda+\frac{1}{s^2}\left[e^{-st}\right]_0^{\lambda}\right)$$

$$=e^{\lambda s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}e^{-\lambda s}\cdot\lambda+\frac{1}{s^2}e^{-\lambda s}-\frac{1}{s^2}\right)$$

$$=\frac{1}{s^2}+\frac{\lambda}{s}$$ である

(2). $L(e^t)=\frac{1}{s-1}$ より

$$L(f(t-\lambda))=\frac{e^{-\lambda s}}{s-1}$$ である

$$L(f(t+\lambda))=e^{\lambda s}\left(\frac{1}{s-1}-\int_0^{\lambda}e^{-st}\cdot e^t\,dt\right)$$

$$=e^{\lambda s}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{1-s}\left[e^{(1-s)t}\right]_0^{\lambda}\right)$$

$$=e^{\lambda s}\cdot\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{1-s}\left(e^{(1-s)\lambda}-1\right)\right)$$

$$=\frac{e^{\lambda}}{s-1}$$ である.