§1. 微分方程式とその解.

微分方程式ってなに?

1. 等号で結ばれていて.
2. よくわからていないもの(未知数)があり.
3. 大体は,解を求めることが目的になる

二次方程式

例 $x^2-5x+6=0$ 　未知数

解くと. $(x-2)(x-3)=0$ より

$\underline{x=2,3}$ となる

解

もとの式に代入すると等号が成立するもの.

例. $2^2-5\cdot 2+6=0$
$3^2-5\cdot 3+6=0$

(常)微分方程式.

例 $y=y(x)$ と y が x の式で表されているとき.

① $y'=\sin x+1$ 　② $y''+y'+\sin y=0$

1階の導関数 $\frac{dy}{dx}$ ともかく.

2階の導関数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ ともかく

未知数(未知式)

のように、x, y やその何階かの導関数を含むものを(常)微分方程式という.

ここで未知数(未知式)は y である.

例えば、① の解は両辺を積分して.

$\int y'\,dx=\int \sin x+1\,dx$ 　より

$y=-\cos x+x+C$ 　(Cは積分定数)となる.

(以下、Cは全て任意定数を表すとする)

実際にこれをもとの方程式に代入してみると.

左辺 $=y'=\sin x+1$ = 右辺 となり.等号が成立していることがわかる.

問題 (1) $y=e^{-x}+x\cdot e^{-x}$ が $y''+2y'+y=0$ の解であることを示せ.

(2) $y=-\dfrac{1}{x+4}$ $(x\neq-4)$ が $y'-y^2=0$ の解であることを示せ.

答. (1). $y=e^{-x}+x\cdot e^{-x}$ を微分すると.

$$y'=-e^{-x}+e^{-x}-x\cdot e^{-x}=-x\cdot e^{-x}$$

$$y''=-e^{-x}+x\cdot e^{-x}$$ を得る. これを代入すると

$$左辺=y''+2y'+y=-e^{-x}+x\cdot e^{-x}-2\cdot x\cdot e^{-x}+e^{-x}+x\cdot e^{-x}$$

$=0$ $=右辺$ となり等号が成立するので, これは解である.

(2). $y=-\dfrac{1}{x+4}$ を微分すると.

$$y'=\frac{1}{(x+4)^2}$$ となる. これを代入すると.

$$左辺=y'-y^2=\frac{1}{(x+4)^2}-\left(-\frac{1}{x+4}\right)^2=0=右辺$$

となり等号が成立するので, これは解である.

注意1. 方程式に偏微分が入った, 偏微分方程式もある.

注意2. 微分方程式の中に含まれる導関数の最高階が n 階である微分方程式を. n 階微分方程式という.

注意3. n 階(常)微分方程式は.

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$$

という形でもかかれる.

いろいろな解

① 一般解

$y=e^x\cos x$, $y=e^x\sin x$ は $y''-2y'+2y=0$ の解であるが、

$y=c_1\cdot e^x\cos x+c_2\cdot e^x\sin x$ も解になっている。

(c_1, c_2 は任意定数)

なんでもいい数(ただし制限がつく場合もある)

→ このように、n 階微分方程式に対して、

n 個の任意定数を含む解を 一般解 という。

問題 (1). $y=c_1\cdot e^x\cos x+c_2 e^x\sin x$ は $y''-2y'+2y=0$ の解であることを示せ。

(2) $y=x^2+c_1 x\log x+c_2 x$ は $x^2 y''-xy'+y=x^2$ の解であることを示せ。

答 (1) $y'=c_1(e^x\cos x-e^x\sin x)+c_2(e^x\sin x+e^x\cos x)$

$y''=c_1(e^x\cos x-e^x\sin x-e^x\sin x-e^x\cos x)$

$+c_2(e^x\sin x+e^x\cos x+e^x\cos x-e^x\sin x)$

$=-2\cdot c_1\cdot e^x\sin x+2c_2\cdot e^x\cos x$ より。 代入すると。

左辺 $=y''-2y'+2y=-2c_1\cdot e^x\sin x+2c_2\cdot e^x\cos x$

$-2c_1(e^x\cos x-e^x\sin x)-2c_2(e^x\sin x+e^x\cos x)+2c_1\cdot e^x\cos x+2c_2 e^x\sin x$

$=0=$ 右辺 より。 これは解である。

(2) $y'=2x+c_1\log x+c_1+c_2$

$y''=2+\dfrac{c_1}{x}$ より。代入すると

左辺 $= x^2 \cdot y'' - xy' + y$

$= 2x^2 + C_1 x - x(2x + C_1 \log x + C_1 + C_2) + x^2 + C_1 x \log x + C_2 x$

$= x^2 =$ 右辺　より. これは解である.

問題. $y = C_1 \cdot \cos x + C_2 \sin x$ は $y'' + y = 0$ の解であることを示せ.

答. $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$

$y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x$ より 代入すれば,

左辺 $= y'' + y = -C_1 \cdot \cos x - C_2 \sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x = 0 =$ 右辺

となる よってこれは解である.

② 特殊解 (特解)

先ほど、① で考えた微分方程式に. さらに次の条件を加えてみる.

☆… $x = 0$ のとき $y = 1, y' = 1$. ($y(0) = 1, y'(0) = 1$ ともかく)

すると計算から $C_1 = 1, C_2 = 0$ が導かれる.

つまりこの条件を満たす解は $y = e^x \cdot \cos x$ である.

このように、一般解のすべての任意定数に、特定の値を代入して

得られる解を 特殊解 という.

また、この特殊解を求める問題を 初期値問題 といい.

☆ のような条件を 初期条件 という.

問題 (1). $y=C_1 e^x \cdot \cos x + C_2 \cdot e^x \cdot \sin x$ は. $y''-2y'+2y=0$ の解であったが,

これに初期条件☆を加えれば,特殊解 $y=e^x \cdot \cos x$ が得られることを示せ.

(2) $y=C\cdot e^{-2x}$ が $y'+2y=0$ の一般解であることを示せ.

また、初期条件 $y(0)=1$ での特殊解を求めよ.

答 (1). さきほどの計算から.

$y'=C_1(e^x\cos x - e^x \sin x)+C_2(e^x \sin x + e^x \cos x)$ であった.

この x に 0, y' に 1 を代入すると.

$1 = C_1 + C_2$ を得る.

また. $y=C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$ に $x=0$, $y=1$ を代入すると.

$1 = C_1$ となる. これより. $C_1=1$, $C_2=0$ であるので,

特殊解 $y=e^x \cdot \cos x$ を得る.

(2). $y'=-2\cdot C\cdot e^{-2x}$ より. 代入すると.

左辺 $= y'+2y = -2\cdot C\cdot e^{-2x} + 2\cdot C\cdot e^{-2x} = 0 =$ 右辺 となるので.

これは一般解である.

さらに. $y=C\cdot e^{-2x}$ に. $x=0$, $y=1$ を代入すると

$1= C\cdot e^{-2\cdot 0} = C$ より. $C=1$ を得る.

$\therefore$ $y=e^{-2x}$ が求める解である.

③ 特異解

一般解の形では表されない解を特異解という.

例1. $(y')^2 - xy' + y = 0$ は.

一般解 $y = cx - c^2$ の他に.

特異解 $y = \dfrac{x^2}{4}$, $y = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} & x \geqq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$, $y = \begin{cases} 0 & x \geqq 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & x < 0 \end{cases}$ をもつ.

問題. $y = \dfrac{x^2}{4}$ が. $(y')^2 - xy' + y = 0$ の解であることを示せ.

答: $y' = \dfrac{x}{2}$ より代入すると.

$$\text{左辺} = (y')^2 - xy' + y$$
$$= \left(\frac{x}{2}\right)^2 - x \cdot \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} = 0 = \text{右辺}$$ となり. これは解である.