1. (1). $y' = y \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$ より. 変数分離形の公式を使うと.

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx .$$

$$\log y = \log \sin x + C .$$

$$y = e^C \cdot \sin x .$$ ここで e^C を C でおきかえて.

$$y = C \cdot \sin x .$$

さらに $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ より $C = 1$ を得るので.

$$y = \sin x$$ である.

(2). $y' = \frac{y}{x} + \frac{3x}{y}$ より. $v = \frac{y}{x}$ とおき. 同次形の公式を使うと.

$$v' = \frac{1}{x}\left(v + \frac{3}{v} - v \right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{3}{v}$$ となる. これより.

$$\int v \, dv = 3 \cdot \int \frac{1}{x} dx .$$

$$\frac{1}{2} v^2 = 3 \log x + C$$

$$v^2 = 6 \log x + C$$

$$e^{v^2} = e^C \cdot x^6$$

ここで e^C を C でおきかえ. $v = \frac{y}{x}$ を代入すると.

$$e^{\frac{y^2}{x^2}} = C \cdot x^6$$ となる

(3). $\frac{d}{dy} 2xy = 2x$, $\frac{d}{dx} (1 + x^2) = 2x$ より この全微分方程式は完全である.

∴ 補助公式より.

$$u(x, y) = \int 2xy \, dx + \int (1 + x^2) dy - \iint 2x \, dx \cdot dy$$

$= x^2y + y$ となり

$x^2y + y = C$ が解である.

(4). 1階線形微分方程式の公式より.

$$y = e^{-\int x^2 dx} \cdot \left(\int x^2 \cdot e^{\int x^2 dx} \cdot dx + c \right)$$

$$= e^{-\frac{1}{3}x^3} \left(e^{\frac{1}{3}x^3} + c \right) = 1 + c \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3}$$ である.

2. $z = y^{-2}$ とおくと. $y = z^{-\frac{1}{2}}$, $y' = -\frac{1}{2} z' \cdot z^{-\frac{3}{2}}$ より.

$$-\frac{1}{2} z' z^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{x} \cdot z^{-\frac{1}{2}} = x^2 \cdot z^{-\frac{3}{2}}.$$

$$z' - \frac{2}{x} z = -2x^2$$ となる. これを解くと.

$$z = e^{\int \frac{2}{x} dx} \cdot \left(\int -2x^2 \cdot e^{\int -\frac{2}{x} dx} dx + c \right)$$

$$= x^2 \cdot \left(\int -2x^2 \cdot x^{-2} dx + c \right)$$

$$= x^2 (c - 2x)$$ これに $z = y^{-2}$ を代入して.

$x^2 \cdot y^2 (c - 2x) = 1$ が解である.

3. $$L^{-1}(F(s)) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) * L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = t * \sin t$$

$$= \int_0^t s \cdot \sin(t-s)\, ds$$

$$= \left[s \cdot \cos(t-s) \right]_0^t - \int_0^t \cos(t-s)\, ds$$

$$= t + \left[\sin(t-s) \right]_0^t$$

$$= t - \sin t$$ となる.

4. 像方程式を求めると.

$$s^2X(s)+2\cdot sX(s)+2X(s)=\frac{1}{s-1}$$ となり

$$X(s)=\frac{1}{s^2+2s+2}\cdot\frac{1}{s-1}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{s+3}{s^2+2s+2}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1}-\frac{2}{(s+1)^2+1}\right)$$

$$\therefore\ x(t)=L^{-1}(X(s))=\frac{1}{5}\left(e^t-e^{-t}\cdot\cos t-2\cdot e^{-t}\cdot\sin t\right)$$ である.

5. 像方程式を求めると.

$$\begin{cases} sX(s)-5-2Y(s)=0 \\ sY(s)-1-2X(s)=0 \end{cases}$$ となり.

$$\begin{array}{rl} & 2sX(s)-4Y(s)=10 \\ +) & -2sX(s)+s^2Y(s)=s \\ \hline & (s^2-4)Y(s)=s+10 \end{array}$$

$$\therefore\ Y(s)=\frac{s+10}{s^2-4}=\frac{3}{s-2}-\frac{2}{s+2}$$ となる.

また. $$X(s)=\frac{1}{2}(sY(s)-1)=\frac{1}{2}\left(\frac{s^2+10s}{s^2-4}-1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{10s+4}{s^2-4}\right)$$

$$=\frac{5s+2}{s^2-4}=\frac{3}{s-2}+\frac{2}{s+2}$$ である

$$\therefore\ x(t)=L^{-1}(X(s))=3\cdot e^{2t}+2\cdot e^{-2t}$$

$$y(t)=L^{-1}(Y(s))=3e^{2t}-2e^{-2t}$$ である.

注. $$x(t)=5\cdot\cosh 2t+\sinh 2t$$
$$y(t)=\cosh 2t+5\sinh 2t$$ でも正解です.