

線形代数学 練習問題

1. \mathbb{R}^2 において, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ が生成系になっていることを示せ.

2. \mathbb{R}^3 において, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ が生成系になっていることを示せ.

3. \mathbb{R}^3 の部分空間 W_1, W_2 を

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = y = z \right\}$$

とすると, W_1, W_2 を $\langle a, b \rangle$ の形で表せ. また, $W_1 \cap W_2$ を求めよ.

4. \mathbb{R}^4 の部分空間 W_1, W_2 を

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x + y + z + w = 0 \\ x + 2y + z + 2w = 0 \end{array} \right\},$$
$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x = y \\ 2x + y + z + 2w = 0 \end{array} \right\}$$

とすると, W_1, W_2 を $\langle a, b \rangle$ の形で表せ. また, $W_1 \cap W_2$ を求めよ.

5. 次のベクトルが1次独立であるかどうか判定せよ.

(a) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

(c) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(d) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

6. 次のベクトルがそれぞれ $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

$$(a) v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(b) v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7. \mathbb{R}^3 の部分空間 W_1, W_2 を

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = 2y = 3z \right\}$$

とすると、 $W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ の次元をそれぞれ求めよ.

8. \mathbb{R}^4 の部分空間 W_1, W_2 を

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x + y + z + w = 0 \\ x + 2y + z + 2w = 0 \end{array} \right\},$$

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x = 3z \\ 3x + y + z + 3w = 0 \end{array} \right\}$$

とすると、 $W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ の次元をそれぞれ求めよ.

9. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

と定めるとき、 $\ker f$ の基底と次元を求めよ.

10. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

と定めるとき、基底 $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と基底 $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 =$

$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ に関する f の表現行列を求めよ.

11. $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とするとき, $\{u_1, u_2\}$ から $\{e_1, e_2\}$ への基底の変換行列を求めよ.

12. \mathbb{R}^3 の二つの基底を

$$[v_1, v_2, v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [u_1, u_2, u_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とするとき, $\{v_1, v_2, v_3\}$ から $\{u_1, u_2, u_3\}$ への基底の変換行列を求めよ.

13. 次の行列の固有多項式と固有値を求めよ.

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (2) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

14. 次の行列の固有値と各固有値に属する固有ベクトルを一つずつ求めよ.

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (2) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

15. 次の行列の固有値と各固有値の重複度を求めよ.

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

16. 次の行列が対角化可能か判定し, 可能であれば対角化せよ.

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (2) \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$(3) \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4) \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$