1. $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&0\\3&0&-1\\-1&2&3\end{bmatrix}$ とおくと

$$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&0\\3&0&-1\\-1&2&3\end{bmatrix}\underset{\substack{\text{②}-2\times\text{①}\\ \text{③}-3\times\text{①}\\ \text{④}+\text{①}}}{=}\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-3&-2\\0&-6&-5\\0&4&4\end{bmatrix}\underset{\substack{\text{③}-2\times\text{②}\\ \text{④}+\frac{4}{3}\times\text{②}}}{=}\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-3&-2\\0&0&-1\\0&0&\frac{4}{3}\end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{④}+\frac{4}{3}\text{③}}{=}\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-3&-2\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}=3.$$

より．ベクトルの数とrankが一致するので．v_1, v_2, v_3 は1次独立である．

2. $A=[v_1, v_2, v_3]=\begin{bmatrix}2&4&2\\1&-1&3\\-3&2&1\end{bmatrix}$ とおくと．

$$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}2&4&2\\1&-1&3\\-3&2&1\end{bmatrix}\underset{\text{①}\times\frac{1}{2}}{=}\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&2&1\\1&-1&3\\-3&2&1\end{bmatrix}\underset{\substack{\text{②}-\text{①}\\ \text{③}+3\times\text{①}}}{=}\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-3&2\\0&8&4\end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{③}+\frac{8}{3}\times\text{②}}{=}\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-3&2\\0&0&\frac{28}{3}\end{bmatrix}=3.$$

$\therefore v_1, v_2, v_3$ は1次独立．

$\dim\mathbb{R}^3=3$ なので．$\{v_1, v_2, v_3\}$ は基底になる．(生成系の計算は最後にのせています)

3. まず．$\begin{cases}x+y+z+w=0\\x+2y+z+2w=0\end{cases}$ を解いて一般解を求めると．

$x=t,\ y=s$ とおいて．$z=-t,\ w=-s$ を得る．

$\therefore$ 一般解は．

$$\begin{bmatrix}t\\s\\-t\\-s\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

となり $W_1=\left\langle\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\rangle$ である．

$\therefore \dim W_1=2.$

No.

次に. $\begin{cases} x=y \\ 2x+y+z+2w=0 \end{cases}$ を解くと. $x=t,\ w=s$ とおいて.

$y=t,\ z=-3t-2s$ となる.

∴一般解は $\begin{bmatrix} t \\ t \\ -3t-2s \\ s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ となり. $W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ である

∴ $\dim W_2 = 2$.

次に. $\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ x+2y+z+2w=0 \\ x=y \\ 2x+y+z+2w=0 \end{cases}$ を解くと. $x=t$ とおいて. $y=t,\ z=-t,\ w=-t$ となる

∴一般解は $\begin{bmatrix} t \\ t \\ -t \\ -t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ となり $W_1 \cap W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$ である

∴ $\dim W_1 \cap W_2 = 1$.

$\dim W_1 + W_2 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2 = 3$ である.

4. 基底の変換行列は

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ で与えられるので.

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$ を計算すると.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ -3 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[\text{③}+\frac{3}{2}\times\text{①}]{\text{①}\times\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & 5 & \frac{3}{2} & 0 & 1\end{array}\right].$$

$$\xrightarrow[\text{③}-\frac{3}{2}\text{②}]{\text{①}+\frac{1}{2}\text{②}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1\end{array}\right] \xrightarrow[\text{③}\times -1]{\substack{\text{①}+4\times\text{③}\\ \text{②}+4\times\text{③}}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{2} & -\frac{11}{2} & 4\\ 0 & 1 & 0 & 6 & -5 & 4\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1\end{array}\right].$$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 13 & -11 & 8\\ 12 & -10 & 8\\ -3 & 3 & -2\end{bmatrix}.$$

これより変換行列は.

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 13 & -11 & 8\\ 12 & -10 & 8\\ -3 & 3 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -3 & -2 & -2\\ 4 & 3 & 2\\ 8 & 4 & 5\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -19 & -27 & -8\\ -12 & -22 & -4\\ 5 & 7 & 2\end{bmatrix}$$ である.

5 (1). $$\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-2 & 1 & -2\\ -1 & t & -2\\ 2 & -2 & t+1\end{vmatrix} = t(t-2)(t+1) - 4 - 4 + 4t + (t+1) - 4(t+4)$$

$$= t^3 - t^2 - t + 1 = (t-1)^2(t+1)$$ である.

ここで. $$\mathrm{rank}(E-A) = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2\\ -1 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 2\end{bmatrix} \underset{\substack{\text{②}-\text{①}\\ \text{③}+2\times\text{①}}}{=} \mathrm{rank}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = 2.$$

∴ 重複度 $2 \neq \dim\mathbb{R}^3 - \mathrm{rank}(E-A) = 1$. となるので.
対角化不可能である.

(2) $\varphi_B(t)=\begin{vmatrix} t-2 & 2 & 0 \\ -1 & t+3 & -1 \\ 0 & 2 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2(t+3)+2(t-2)+2(t-2)$

$= (t-2)(t^2+t-6+4) = (t-2)(t+2)(t-1)$

∴ 固有値は 2, 1, −2 となる.

異なる3つの固有値をもつので、これは対角化可能.

固有値1の固有ベクトルとして.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ より. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ があげられる.

固有値2の固有ベクトルとして.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ より $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ があげられる.

固有値−2の固有ベクトルとして.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ より $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ があげられる.

∴ $P=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ とおけば.

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$ となる.

No.

2.(参考)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$ を解くと.

$$\begin{cases} a = \frac{1}{8}(x-2z) \\ b = \frac{1}{28}(5x-4y+2z) \\ c = \frac{1}{56}(x+16y+6z) \end{cases}$$ となる. すなわち

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{8}(x-2z)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \frac{1}{28}(5x-4y+2z)\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{56}(x+16y+6z)\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とでき、これらが生成系であることがわかる.