§ 3. 行列の対角化

線形変換 $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を.

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{bmatrix}$$ とする.

$\{e_1, e_2\}$ に関する f の表現行列は

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$ である.

ここで. $\mathbb{R}^2$ の基底 $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ とすると.

$$f(u_1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot u_1 = [u_1, u_2]\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(u_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = u_2 = [u_1, u_2]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ である

これより. $\{u_1, u_2\}$ に関する f の表現行列は.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ とできる.

また. $\{e_1, e_2\}$ から $\{u_1, u_2\}$ への基底の変換行列 P は

$[u_1, u_2] = [e_1, e_2]P$ より $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ である.

このとき、命題5.6から.

☆… $B = P^{-1} A \cdot P$ の関係が成り立つ.

ここで B のように対角部分にのみ. 0 でない値が入る行列を対角行列といい.

☆のように. P を使って. 対角行列になるとき. f の対角化という.

($A = PBP^{-1}$ を対角化という場合もある)

固有値と固有ベクトル．

線形変換．$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対し．

$$f(u) = \lambda u \qquad (u \neq 0)$$

をみたすスカラー λ を f の固有値といい．

u を固有値 λ に属する固有ベクトルという．

また．単に行列 A に対し．

$Au = \lambda u$ をみたすときも同様の言葉を使う．

ここで．$Au = \lambda u$ は．

$$(\lambda E - A)u = 0$$ とも表せるが．

これをみたす u がとれることは．$|\lambda E - A| = 0$ となることである．

すなわち

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$ である．

したがって．λ が A の固有値 $\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$ である．

ここで．t を変数とする n 次多項式．

$\varphi_A(t) = |tE - A|$ を．A の固有多項式といい．

$\varphi_A(t) = 0$ を A の固有方程式という．

$\Longrightarrow$ λ が A の固有値 $\Leftrightarrow$ λ が $\varphi_A(t) = 0$ の解．

ここで、$\varphi_A(t)=0$ の解は複素数解を含めれば n 個ある。

以後、解の重複度を、固有値の**重複度**という。

ここまでをまとめると、次のようになる。

命題6.1 (1)、Aの固有値は $\varphi_A(t)=0$ の解であり、
重複度を込めて、n 個ある。

(2) 固有値 λ に属する固有ベクトルは、
$(\lambda E-A)x=0$ をみたす自明でない x である。

例題、$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ の固有多項式を求め、固有値を導け。

答、$\varphi_A(t)=\begin{vmatrix}t-2&-1&0\\-1&t-3&0\\0&0&t-2\end{vmatrix}=(t-2)\big((t-2)(t-3)-1\big)$

$=(t-2)(t^2-5t+6-1)=(t-2)(t^2-5t+5)$ である

これより固有値は、$2,\ \dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$ である。

問題 次の行列の固有多項式と固有値を求めよ。

(1) $A=\begin{bmatrix}2&2\\1&3\end{bmatrix}$ (2) $B=\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&0&1\\0&2&0\end{bmatrix}$

答 (1) $\varphi_A(t)=(t-2)(t-3)-2=t^2-5t+6-2=t^2-5t+4=(t-1)(t-4)$.

$\therefore$ 固有値は $1,4$ である

(2) $\varphi_A(t)=(t-1)(t-2)(t+2)$ より固有値は、$1,2,-2$ である。

No.

例題 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ の固有値2に属する固有ベクトルを1つ求めよ.

答 $\begin{bmatrix}2&1&0\\1&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ となる0でない $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ をさがせばよい.

すると. $\begin{cases}2x+y=2x\\x+3y=2y\\2z=2z\end{cases}$ より. $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases}$ となる. $\therefore\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ は固有ベクトルである

問題 (1) $A=\begin{bmatrix}2&2\\1&3\end{bmatrix}$ の固有値 1, 4 に属する固有ベクトルをそれぞれ1つ求めよ.

(2) $B=\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&0&1\\0&2&0\end{bmatrix}$ の固有ベクトルを1つ求めよ.

答 (1). $\begin{bmatrix}2&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ とすれば.

$\begin{cases}2x+2y=x\\x+3y=y\end{cases}$ $x=2y$ より. $\begin{cases}x=-2t\\y=t\end{cases}$ となる. $\therefore\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$ は固有ベクトルである

$\begin{bmatrix}2&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ とすれば.

$\begin{cases}2x+2y=4x\\x+3y=4y\end{cases}$ より $x=y$ となり $\begin{cases}x=t\\y=t\end{cases}$ となる $\therefore\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ が固有ベクトルである

(2). $\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&0&1\\0&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ とすれば.

$\begin{cases}x+2y-z=x\\x+z=y\\2y=z\end{cases}$ より. $\begin{cases}x=-y\\z=2y\end{cases}$ となるので. $\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$ が固有ベクトルである.

固有空間

固有値 λ に対して.

$$V(\lambda) = \ker(\lambda E - A) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\lambda E - A)x = 0 \}$$

は. 固有値 λ に属する固有ベクトルと零ベクトルからなる線形空間である.

これを. 固有値 λ に対する **固有空間** という.

命題6.2. Aを(n, n)行列. Pをn次正則行列とするとき.

(1). $\varphi_A(t) = \varphi_{P^{-1}AP}(t)$

(2). Aの固有値と$P^{-1}AP$の固有値は等しい.

(3). λをAの固有値とするとき.

$$\dim V(\lambda) = n - \mathrm{rank}(\lambda E - A) \text{ が成り立つ.}$$

(4) $\varphi_A(t) = \varphi_{{}^tA}(t)$

∵ (1). $\varphi_{P^{-1}AP}(t) = |tE - P^{-1}AP|$

$$= |t \cdot P^{-1}EP - P^{-1}AP| = |P^{-1}(tE - A)P|$$

$$= |P^{-1}| \cdot |tE - A| \cdot |P| = |tE - A| = \varphi_A(t)$$

(2) (1)より明らか.

(3). $\dim V(\lambda) = \dim \ker(\lambda E - A) = n - \dim \mathrm{Im}(tE - A) = n - \mathrm{rank}(tE - A)$

(4) $\varphi_{{}^tA}(t) = |tE - {}^tA| = |{}^t(tE - A)| = |tE - A| = \varphi_A(t)$.

No.

<u>例題</u>. $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ の固有値2に対する固有空間を求めよ.

<u>答</u>. $\begin{bmatrix}2&1&0\\1&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ とすると.

$\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases}$ であったので, $V(2)=\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\t\end{bmatrix}\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\rangle$ である.

<u>問題</u>. (1). $A=\begin{bmatrix}2&2\\1&3\end{bmatrix}$ とするとき. $V(1)$ と $V(4)$ を求めよ.

(2) $A=\begin{bmatrix}3&1\\1&3\end{bmatrix}$ とするとき、固有値と.それぞれの固有空間を求めよ.

<u>答</u> (1). さきほどの計算より.

$V(1)=\left\langle\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\right\rangle$, $V(4)=\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\rangle$ である

(2). $\varphi_A(t)=\begin{vmatrix}t-3&-1\\-1&t-3\end{vmatrix}=(t-3)^2-1=t^2-6t+8=(t-2)(t-4)$

より. 固有値は 2と4である.

$\begin{bmatrix}3&1\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ とすれば. $\begin{cases}3x+y=2x\\x+3y=2y\end{cases}$ より $x=-y$ をえる.

$\therefore V(2)=\left\langle\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\rangle$ である.

$\begin{bmatrix}3&1\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ とすれば $\begin{cases}3x+y=4x\\x+3y=4y\end{cases}$ より $x=y$ をえる.

$\therefore V(4)=\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\rangle$ である.