定理 4.14.

(1) $\{u_1,\cdots,u_n\}$ から $\{u_1,\cdots,u_n\}$ への基底の変換行列は単位行列である.

(2) $\{v_1,\cdots,v_n\}$ から $\{u_1,\cdots,u_n\}$ への基底の変換行列を P.

$\{u_1,\cdots,u_n\}$ から $\{w_1,\cdots,w_n\}$ への基底の変換行列を Q とすると.

$\{v_1,\cdots,v_n\}$ から $\{w_1,\cdots,w_n\}$ への基底の変換行列は PQ である.

(3) $\{v_1,\cdots,v_n\}$ から $\{u_1,\cdots,u_n\}$ への基底の変換行列を P.

$\{u_1,\cdots,u_n\}$ から $\{v_1,\cdots,v_n\}$ への基底の変換行列を Q とすると.

$PQ=QP=E_n$ である.

(∵) (1). $[u_1,\cdots,u_n]=[u_1,\cdots,u_n]E_n$ よりわかる.

(2). $[u_1,\cdots,u_n]=[v_1,\cdots,v_n]P$ かつ $[w_1,\cdots,w_n]=[u_1,\cdots,u_n]Q$ より.

$[w_1,\cdots,w_n]=[v_1,\cdots,v_n]PQ$ となることからわかる.

(3). (1),(2) より直ちに導かれる.

命題 4.15. $\{v_1,\cdots,v_n\}$ から $\{u_1,\cdots,u_n\}$ への基底の変換行列を P とする.

$x\in V$ の $\{u_1,\cdots,u_n\}$ に関する成分表示を.

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ とするとき, $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ は. $\{v_1,\cdots,v_n\}$ に関する x の成分表示である.

(∵) $[u_1,\cdots,u_n]=[v_1,\cdots,v_n]P$ より

$$x=[u_1,\cdots,u_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=[v_1,\cdots,v_n]P\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=[v_1,\cdots,v_n]\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$ となり.

$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ は $\{v_1,\cdots,v_n\}$ に関する x の成分表示である.

No.

命題 5.6

(1). $1_V : V\{v_1, \cdots, v_n\} \longrightarrow V\{v_1, \cdots, v_n\}$

の表現行列は E_n である.

(2) $1_V : V\{v_1, \cdots, v_n\} \longrightarrow V\{v_1', \cdots, v_n'\}$ の表現行列は.

$\{v_1', \cdots, v_n'\}$ から $\{v_1, \cdots, v_n\}$ への基底の変換行列である.

(3)
$$
\begin{array}{ccc}
f : V\{v_1, \cdots, v_n\} & \xrightarrow{A} & W\{w_1, \cdots, w_m\} \\
\downarrow P & & \downarrow Q \\
f : V\{v_1', \cdots, v_n'\} & \xrightarrow{B} & W\{w_1', \cdots, w_m'\}
\end{array}
$$

とする. ただし. A, B は f の表現行列.

P, Q はそれぞれ $\{v_1', \cdots, v_n'\}$ から $\{v_1, \cdots, v_n\}$ への基底の変換行列.

$\{w_1', \cdots, w_m'\}$ から $\{w_1, \cdots, w_m\}$ への基底の変換行列である.

このとき, $QA = BP$ が成り立つ.

特に.
$$
\begin{array}{ccc}
f : V\{v_1, \cdots, v_n\} & \xrightarrow{A} & V\{v_1, \cdots, v_n\} \\
\downarrow P & & \downarrow Q \\
f : V\{v_1', \cdots, v_n'\} & \xrightarrow{B} & V\{v_1', \cdots, v_n'\}
\end{array}
$$
の場合, $A = P^{-1}BP$ となる

∵ (1) と (2) は. 定義と定理 4.14 より求まる.

(3) まず, $x = [v_1, \cdots, v_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ とすれば. $[w_1, \cdots, w_m] = [w_1', \cdots, w_m']Q$ より.

$$f(x) = [w_1, \cdots, w_m]A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [w_1', \cdots, w_m']QA\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ となる.

一方,
$$f(x) = f\left([v_1, \cdots, v_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = f\left([v_1', \cdots, v_n']P\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = [w_1', \cdots, w_m']BP\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ であるので.

$QA = BP$ となる.

2.2. 次元定理と同型写像

$f: V \to W$ に対し、以下を定義する。

定義. (1). $\mathrm{Im} f = W$ のとき、f を全射であるという。

$\Leftrightarrow$ 任意の $y \in W$ に対し、$f(x) = y$ となる $x \in V$ が存在する。

(2). $\ker f = \{0\}$ のとき、f を単射であるという。

$\Leftrightarrow$ $x, y \in V$, $x \neq y$ ならば $f(x) \neq f(y)$.

$\because$ もし、$f(x) = f(y)$ であれば、

$f(x-y) = 0$ より、$x - y \in \ker f$ となり、$\ker f = \{0\}$ に矛盾する

(3) $g: W \to V$ が存在して、

$g \circ f = 1_V$, $f \circ g = 1_W$ となるとき、

f を同型写像という。また g を f の逆写像といい f^{-1} と表す。

さらに、このとき、V と W は同型であるという。

命題 5.2. $\dim V = n$, $\dim W = m$ とする。

(1). $f: V \to W$ が全射のとき、W の1次独立なベクトル $w_1, \cdots, w_k$ に対し、

$f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2, \cdots, f(v_k) = w_k$ となるような $v_1, \cdots, v_k$ をとると、

$v_1, \cdots, v_k$ は1次独立である

特に、$n = m$ で、$\{w_1, \cdots, w_m\}$ が基底であれば、$\{v_1, \cdots, v_m\}$ も基底である。

(2). $f: V \to W$ が単射のとき、V の1次独立なベクトル $v_1, \cdots, v_k$ に対し、

$f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_k)$ は1次独立である。

特に $n = m$ で、$\{v_1, \cdots, v_m\}$ が基底であれば、$\{f(v_1), \cdots f(v_m)\}$ も基底である。

No.

∵ (1) $r_1v_1+r_2v_2+\cdots+r_kv_k=0$ とすると.

$f(r_1v_1+r_2v_2+\cdots+r_kv_k)=0$ より

$r_1f(v_1)+r_2f(v_2)+\cdots+r_kf(v_k)=0$

$r_1w_1+r_2w_2+\cdots+r_kw_k=0$ となるので,

$r_1=r_2=\cdots=r_k=0$ となり, $v_1,\cdots,v_k$が 1次独立であることがわかる.

(2) $r_1f(v_1)+r_2f(v_2)+\cdots+r_kf(v_k)=0$ とすると.

$f(r_1v_1+r_2v_2+\cdots+r_kv_k)=0$ と $\ker f=\{0\}$ より.

$r_1v_1+r_2v_2+\cdots+r_kv_k=0$ がわかる.

$\therefore r_1=r_2=\cdots=r_k=0$ となり. $f(v_1)\cdots f(v_k)$ が 1次独立であることがわかる.

<u>定理5.3.</u> $\dim V=\dim W=n$ とすると. $f:V\to W$ に対し 次が同値.

(1). fが 同型写像

(2) fが全射

(3) fが単射.

∵ (1)⇒(2)

$g:W\to V$ を fの逆写像 とすると.

任意の $x\in W$ について. $y=g(x)\in V$ とすれば,

$f(y)=f(g(x))=f\circ g(x)=1_W(x)=x$ となるので全射である.

(1)⇒(3)

$f(x)=0$ とすると.

$x=g(f(x))=g(0)=0$ より. $\ker f=\{0\}$ であることがわかる.

(2) ⇒ (1)

$\{w_1, \cdots, w_n\}$ を W の基底とする. $v_1, \cdots, v_n \in V$ を.

$f(v_1) = w_1,\ f(v_2) = w_2, \cdots, f(v_n) = w_n$ となるようにとれば,

命題5.2より. $\{v_1, \cdots, v_n\}$ は基底である.

今. $g : W \to V$ を. $g(w_1) = v_1, \cdots, g(w_n) = v_n$ によって定まる線形写像とすると.

f の逆写像になるので, f は同型写像である.

(3) ⇒ (1).

$\{v_1, \cdots, v_n\}$ を V の基底とする.

$w_1 = f(v_1), \cdots, w_n = f(v_n)$ とすれば,

命題5.2より $\{w_1, \cdots, w_n\}$ は基底である.

今. g を.さきほどと同じようにとれば, f の逆写像になるので, f は同型写像である.

定理5.5 (次元定理・参考)

$f : V \to W$ に対し. 次の式が成り立つ.

$$\dim V = \dim \mathrm{Im} f + \dim \ker f$$