No.

2.1. 線形写像の表現行列

$\{v_1, \cdots, v_n\}$ を V の基底，$\{w_1, \cdots, w_m\}$ を W の基底とする．

$f: V \longrightarrow W$ に対し．V, W の基底を固定して考えるとき，

$f: V\{v_1, \cdots, v_n\} \longrightarrow W\{w_1, \cdots, w_m\}$ と表す．

成分表示

$x \in V$ は．$\{v_1, \cdots, v_n\}$ を使って．

$$x = x_1 \cdot v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = [v_1, \cdots, v_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ とできる．

ここで，$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ を．基底 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ に関する成分表示という．

$\longrightarrow$ これを使えば，（スカラーが $\mathbb{R}$ の）線形空間 V は．$\mathbb{R}^n$ と同一視することができる．

表現行列

さて．上の $x \in V$ を f で写したものを考えてみると．

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n) \\ &= f(x_1 v_1) + f(x_2 v_2) + \cdots + f(x_n v_n) \\ &= x_1 f(v_1) + x_2 f(v_2) + \cdots + x_n f(v_n) \end{aligned}$$ とできる．

$\longrightarrow$ これは．$f(x)$（すなわち f）が $f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_n)$ によって決まることを表している．

今、$f(v_j) \in W$ であるので、$\{w_1, \cdots, w_m\}$ を使って、

$$f(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m = [w_1, \cdots, w_m]\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$ と表すことができる

これを使うと、$f(x)$ は、次のように表される。

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1 a_{11} w_1 + x_1 a_{21} w_2 + \cdots + x_1 a_{m1} w_m \\ &\quad + x_2 a_{12} w_1 + x_2 a_{22} w_2 + \cdots + x_2 a_{m2} w_m \\ &\quad \vdots \\ &\quad + x_n a_{1n} w_1 + x_n a_{2n} w_2 + \cdots + x_n a_{mn} w_m \\ &= [w_1, \cdots, w_m] \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \\ &= [w_1, \cdots, w_m] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここで、上で現われた (m, n) 行列、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ を基底 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ と $\{w_1, \cdots, w_m\}$ に関する f の**表現行列**という。

⟶ それぞれの成分表示を考えれば、

f は A によって表されていることになる。

例題 $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を.

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y+3z \\ 2x+3y-z \end{bmatrix}$$ で定義する.

ここで、$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とおくとき.

基底 $\{v_1, v_2, v_3\}$ と $\{w_1, w_2\}$ に関する f の表現行列を求めよ.

答. まず、$f(v_1) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{5}{2} w_1 - \frac{3}{2} w_2 = [w_1, w_2] \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ とできる

$\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = a w_1 + b w_2 = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b \\ a+b \end{bmatrix}\right.$ より

$\left. \begin{cases} a-b=4 \\ a+b=1 \end{cases}\right.$ をとくと $\begin{cases} a=\frac{5}{2} \\ b=-\frac{3}{2} \end{cases}$ となる $\Big)$

同様に

$$f(v_2) = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{9}{2} w_1 - \frac{1}{2} w_2 = [w_1, w_2] \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$f(v_3) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 w_1 - w_2 = [w_1, w_2] \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$ である.

∴ 表現行列は.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{9}{2} & 3 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$ である.

No.

問題 (1) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x+3y\\2x-y\end{bmatrix}$$ で定義する.

$v_1=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$, $v_2=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$, $w_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $w_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ とおくとき,

基底 $\{v_1, v_2\}$ と $\{w_1, w_2\}$ に関する f の表現行列を求めよ.

(2). $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を

$f\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ によって定義するとき,

f の標準基底に関する表現行列を求めよ.

答 (1). $f(v_1)=\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}=7w_1-w_2=[w_1, w_2]\begin{bmatrix}7\\-1\end{bmatrix}$

$f(v_2)=\begin{bmatrix}11\\1\end{bmatrix}=21w_1-10w_2=[w_1, w_2]\begin{bmatrix}21\\-10\end{bmatrix}$ より.

表現行列 は $A=\begin{bmatrix}7&21\\-1&-10\end{bmatrix}$ である.

(2) $f(e_1)=f\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

$f(e_2)=f\left(2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ より

表現行列 は $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$ である.

基底の変換行列

表現行列で、特に $V=W$，$f=1_V$ である場合を考える．

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = [v_1, \cdots, v_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$x = 1_V(x) = [w_1, \cdots, w_n] \cdot A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ であったので，

$$[v_1, \cdots, v_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [w_1, \cdots, w_n] A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ となる．

この式は全ての $x_1, \cdots, x_n$ で成り立つので，

☆ … $[v_1, \cdots, v_n] = [w_1, \cdots, w_n] A$ がわかる．

∵ まず，$x_1 = 1$，$x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$ とすれば，

$v_1 = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \cdots + a_{n1} w_n$ がわかる．

以下、$x_1 = 0$，$x_2 = 1$，$x_3 = x_4 = \cdots = x_n = 0$

の場合などを考えればよい．

このように ☆ を満たす A を，

$\{w_1, \cdots, w_n\}$ から $\{v_1, \cdots, v_n\}$ への**基底の変換行列**という．

No.

例題. $u_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $u_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$ とするとき、

$\{u_1,u_2\}$ から $\{e_1,e_2\}$ への基底の変換行列を求めよ.

答. 基底の変換行列を A とすると.

$[e_1,e_2]=[u_1,u_2]A$ より $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}A$ である.

$\therefore A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$ となる.

問題. (1). $u_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$, $u_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$ とするとき、

$\{u_1,u_2\}$ から $\{e_1,e_2\}$ への基底の変換行列を求めよ.

(2) $[u_1,u_2,u_3]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$, $[v_1,v_2,v_3]=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ とするとき、

$\{u_1,u_2,u_3\}$ から $\{v_1,v_2,v_3\}$ への基底の変換行列を求めよ.

答 (1) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}A$ より

$A=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}$ である.

(2) $\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}A$ より.

$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-2&0\\1&1&1\\-1&-1&1\end{bmatrix}$

である.