§2. 線形写像と行列.

写像. 集合 X, Y に対し. X の各元に対し. Y の元を1つ対応させる方法を. X から Y への写像とよび.

$f: X \longrightarrow Y$ で表す.

このとき、X を写像 f の定義域. Y を値域 とよぶ.

また $x \in X$ が f により対応させている Y の元を $f(x)$ とかき.

x の f による像 という.

例. $\mathbb{R}$ から. $\mathbb{R}$ への対応 f を.

$f(x) = x^2 + 1$.

$f(x) = x + 1$.

$f(x) = x$. などと定義すれば、これらは写像である.

以下、定義域、値域 が ともに線形空間である場合を考える.

V, W を線形空間とする.

定義. $f: V \longrightarrow W$ が次のの条件を満たすとき、線形写像であるという.

(1) 任意の $x, y \in V$ に対し. $f(x+y) = f(x) + f(y)$

(2) 任意の $x \in V$ と r:スカラー に対し. $f(rx) = r \cdot f(x)$

注意. ・この定義は. 任意の $x, y \in V$ と. スカラー s, t に対し.

$f(rx+sy) = rf(x) + sf(y)$ となることと同値である.

・$f(0) = 0$ と $f(-x) = -f(x)$ は簡単にわかる.

例. a, b, c, d を実数 とすると. 次で定義される $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ は線形写像である.

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}.$$

∵ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とすると. $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$ は. 上の通り.

$f\left(\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} az+bw \\ cz+dw \end{bmatrix}$ である.

$\therefore\ f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax+by+az+bw \\ cx+dy+cz+dw \end{bmatrix}$ である.

一方. $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} x+z \\ y+w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+z \\ y+w \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ax+az+by+bw \\ cx+cz+dy+dw \end{bmatrix}$ であるので.

$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} x+z \\ y+w \end{bmatrix}\right)$ となり. 条件(1) がわかる.

(2) も同様にしてわかる.

注意. A を. (m, n) 行列 として. 写像 $f_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を.

任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して.

$f_A(x) = Ax$ で定義すると.

これは線形写像 である.

・ f が V から V への線形写像であるとき、
f を線形変換という．

・ V の各元 x に．x を対応させる．写像を恒等写像といい．
$1_V : V \longrightarrow V$ で表す．すなわち任意の $x \in V$ に対し．

$$1_V(x) = x$$ である．

・ V, W, U を線形空間，$f : V \longrightarrow W$，$g : W \longrightarrow U$ を線形写像とするとき．

$g \circ f(x) = g(f(x))$ $(x \in V)$ と定義すると．

$g \circ f : V \longrightarrow U$ が定まる．

これを f と g の合成写像という．

問題．(1) 前ページの注意を証明せよ．

(2)．上の合成写像が線形写像であることを証明せよ．

答(1) $f_A(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = f_A(x) + f_A(y)$

$f_A(rx) = A(rx) = r \cdot Ax = rf_A(x)$ より線形写像である

(2)． $g \circ f(x+y) = g(f(x+y)) = g(f(x) + f(y)) = g(f(x)) + g(f(y))$

$= g \circ f(x) + g \circ f(y)$

$g \circ f(rx) = g(f(rx)) = g(rf(x)) = r \cdot g(f(x))$

$= r \cdot g \circ f(x)$ より線形写像である．

像と核

線形写像 $f: V \longrightarrow W$ について.

$\mathrm{Im} f = \{ f(x) \mid x \in V \}$ を f の像という. $f(V)$ で表すこともある.

また.

$\mathrm{Ker} f = \{ x \in V \mid f(x) = 0 \}$ をfの核という. $f^{-1}(0)$ で表すこともある.

命題5.1. 線形写像 $f: V \longrightarrow W$ について次が成立する.

(1) 像 $\mathrm{Im} f$ は W の部分空間である

(2) 核 $\mathrm{Ker} f$ は V の部分空間である.

∵ (1). $x, y \in \mathrm{Im} f$ に対して. $u, v \in V$ が存在して.

$f(u) = x$, $f(v) = y$ とできる.

ここで、 $x + y = f(u) + f(v) = f(u+v) \in \mathrm{Im} f$ である.

一方. スカラー r に対し.

$rx = r \cdot f(u) = f(ru) \in \mathrm{Im} f$ である.

∴ $\mathrm{Im} f$ は部分空間.

(2). $x, y \in \mathrm{Ker} f$ に対して.

$f(x+y) = f(x) + f(y) = 0$ より. $x + y \in \mathrm{Ker} f$

$f(rx) = r \cdot f(x) = 0$ より $rx \in \mathrm{Ker} f$

∴ $\mathrm{Ker} f$ は部分空間.

例題　$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ と定めるとき、

$\mathrm{Ker} f$ の基底と次元を求めよ。

答．$\mathrm{Ker} f$ は次のように表せる。

$$\mathrm{Ker} f = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x + y = 0 \\ z = 0 \end{matrix} \right\}.$$

∴これを解くと、$y = t$ とおいて、

$x = -t$ を得る

∴一般解は、$\begin{bmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ となる。

これより $\mathrm{Ker} f = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ とできるので、

基底は $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$，次元は 1 である。

<u>問題</u> $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ と定めるとき，

$\mathrm{Ker} f$ の基底と次元を求めよ．

<u>答</u>．$\mathrm{Ker} f$ は次のように表せる．

$$\mathrm{Ker} f = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 4z = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + 2z = 0 \right\}.$$

∴ これを解くと．$y = t,\ z = s$ とおいて．

$x = -t - 2s$ をえる．

∴ 一般解は．$\begin{bmatrix} -t-2s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ となる

これより．$\mathrm{Ker} f = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ とできるので．

基底は $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$，次元は 2 である．