命題4.8.

V が n 次元であるための必要十分条件は、

1次独立なベクトルの最大個数が n であることである。

このとき、1次独立な n 個のベクトルは V の基底になる。

∵ ① $\{v_1, \cdots, v_n\}$ を V の基底とする。

任意の $w_1, \cdots, w_{n+1} \in V$ をとったとき、

$w_1, \cdots, w_{n+1}$ は $v_1, \cdots, v_n$ の1次結合で表される

∴ 補題4.6より $w_1, \cdots, w_{n+1}$ は1次従属になる

∴ 1次独立なベクトルの最大個数は n である。

② V に含まれる1次独立であるベクトルの最大個数を n とし、

それを $v_1, \cdots, v_n$ とする。

任意の $u \in V$ に対し、1次結合

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n + bu = 0$ を考えると、

$v_1, \cdots, v_n, u$ は1次従属なので、自明でない解をもつ

その解がもし $b = 0$ ならば、$v_1, \cdots, v_n$ が1次独立であることから、

$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ となってしまう。

∴ $b \neq 0$ としてよい。これより

$$u = -\frac{a_1}{b} v_1 - \frac{a_2}{b} v_2 - \cdots - \frac{a_n}{b} v_n \in \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$$ となるので、

$\{v_1, \cdots, v_n\}$ は V の基底となり、$\dim V = n$ である。

定理 4.9.

V を n 次元線形空間とする

$v_1, \cdots, v_k \in V \quad (k < n)$ が 1 次独立のとき、

$V \ni u_1, \cdots, u_{n-k}$ を付け加えて

$\{v_1, \cdots, v_k, u_1, \cdots, u_{n-k}\}$ が V の基底となるようにできる.

∵ まず、$\langle v_1, \cdots, v_k \rangle \neq V$ なので.

V に入っているが、$\langle v_1, \cdots, v_k \rangle$ に入っていない $u_1 \in V$ が存在する.

すると、$v_1, \cdots, v_k, u_1$ は 1 次独立である

∵ もし、$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k + b_1 u_1 = 0$ とおいたとき.

$b_1 = 0$ ならば、$v_1, \cdots, v_k$ が 1 次独立であることから.

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0 \text{ がわかる.}$$

$b_1 \neq 0$ ならば. $u_1 = -\frac{a_1}{b_1} v_1 - \frac{a_2}{b_1} v_2 - \cdots - \frac{a_k}{b_1} v_k \in \langle v_1, \cdots, v_k \rangle$

より矛盾.

もし、$n = k+1$ ならば、命題 4.8 より $\{v_1, \cdots, v_k, u_1\}$ が基底になる.

もし、$n > k+1$ ならば、同様にして $u_2 \in V$ を

$\{v_1, \cdots, v_k, u_1, u_2\}$ が 1 次独立であるようにとれる.

以下、くり返せば、

$\{v_1, \cdots, v_k, u_1, \cdots, u_{n-k}\}$ が基底になるようにとれる.

命題 4.11.

W_1, W_2 を V の部分空間とするとき、

$\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1\cap W_2)$

$\because$ まず、$W_1\cap W_2$ の基底を $\{w_1, \cdots, w_k\}$ とする.

ここで、$W_1\cap W_2$ は W_1 と W_2 の部分空間なので、

定理 4.9 より. $u_1, \cdots, u_t \in W_1$ を.

$\{w_1, \cdots, w_k, u_1, \cdots, u_t\}$ が W_1 の基底になるようにとれる.

同じく, $v_1, \cdots, v_s \in W_2$ を

$\{w_1, \cdots, w_k, v_1, \cdots, v_s\}$ が W_2 の基底になるようにとれる.

すると. $\{w_1, \cdots, w_k, u_1, \cdots, u_t, v_1, \cdots, v_s\}$ は W_1+W_2 の基底になる.

$\because$ $a_1w_1+\cdots+a_kw_k+b_1u_1+\cdots+b_tu_t+c_1v_1+\cdots+c_sv_s = 0$ とおくと.

$\underbrace{-c_1v_1-\cdots-c_sv_s}_{\in W_2} = a_1w_1+\cdots+a_kw_k+\underbrace{b_1u_1+\cdots+b_tu_t}_{\in W_1}$ とできるが.

この両辺は $W_1\cap W_2$ に入っている.

$\therefore$ $-c_1v_1-\cdots-c_sv_s = d_1w_1+\cdots+d_kw_k$ とできるが.

$w_1, \cdots, w_k, v_1, \cdots, v_s$ が 1次独立なので.

$c_1=c_2=\cdots=c_s=d_1=\cdots=d_k=0$ となる.

同様に. $a_1=\cdots=a_k=b_1=\cdots=b_t=0$ もわかる.

$\therefore$ 1次独立である.

$W_1+W_2 = \langle w_1, \cdots, w_k, u_1, \cdots, u_t, v_1, \cdots, v_s\rangle$ は明らか

No.

これより．$\dim(W_1+W_2)=k+t+s$ であるが．

$\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)=(k+t)+(k+s)-k=k+t+s$ となり

命題をえる．

系4.12． $V=W_1+W_2$ であるとき，

$V=W_1\oplus W_2$ であるための必要十分条件は

$\dim V=\dim W_1+\dim W_2$ である．

命題4.13．

WをVの部分空間とすると．Vの部分空間W'で

$V=W\oplus W'$ となるものが存在する．

∵ Wの基底を $\{v_1,\cdots,v_k\}$ とすると．

定理4.9より． $u_1,\cdots,u_r$ を付け加えて．

$\{v_1,\cdots,v_k,u_1,\cdots,u_r\}$ がVの基底であるようにとれる．

今．$W'=\langle u_1,\cdots,u_r\rangle$ とすれば，

$W\cap W'=\{0\}$ と．$W+W'=V$ をみたす．