No.

基底

定義 $V \ni v_1, \cdots, v_n$ が次の条件をみたすとき．

$\{v_1, \cdots, v_n\}$ を V の基底 という．

条件：(1) $v_1, \cdots, v_n$ は 1次独立．

(2). $V = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$ である

すなわち．Vの任意のベクトルは．$v_1, \cdots, v_n$ の 1次結合で表される．

例題 $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ が基底であることを示せ．

答．まず．v_1, v_2 が 1次独立であることを示す．

$A = [v_1, v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ とおいて．$\mathrm{rank} A$ を調べると．

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{2行 - 1行} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ より $\mathrm{rank} A = 2$ となり．

v_1, v_2 は 1次独立である

次に．Vの任意のベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ が v_1, v_2 の1次結合で表されることを示したいので．

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ となっていればよい．

これを．t と s の連立方程式だと思い解くと．

$\begin{cases} t + s = x \\ t + 2s = y \end{cases}$ より $\begin{cases} s = y - x \\ t = 2x - y \end{cases}$ とできる

$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (2x - y) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (y - x) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ であるので．$\mathbb{R}^2 = \langle v_1, v_2 \rangle$ である

$\therefore \{v_1, v_2\}$ は $\mathbb{R}^2$ の基底である

問題 (1) $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ が $\mathbb{R}^2$ の基底であることを示せ.

(2) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ が $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

答 (1) $A = [v_2, v_1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ とおくと.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{2行-1行} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ となるので $\mathrm{rank}\,A = 2$ である.

$\therefore v_1, v_2$ は1次独立.

また. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ を s と t について解くと.

$\begin{cases} s = y - x \\ t = 3x - 2y \end{cases}$ をえる.

$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (y-x)v_1 + (3x-2y)v_2$ となるので.

$\{v_1, v_2\}$ は基底である.

(2). $A = [v_1, v_2, v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とおくと.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2行-1行} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ より $\mathrm{rank}\,A = 3$ である

$\therefore v_1, v_2, v_3$ は1次独立.

また. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = p \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ を解くと.

$$\begin{cases} p = \frac{1}{2}(x+y) \\ q = \frac{1}{2}(x-y) \\ r = z \end{cases}$$ をえる.

$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(x+y)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(x-y)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とできるので.

$\{v_1, v_2, v_3\}$ は基底である.

次元.

補題 4.6.

$a_1, \cdots, a_n \in V$ がそれぞれ $b_1, \cdots, b_m \in V$ の1次結合で表されていたとする.

もし. $n > m$ ならば, $a_1, \cdots, a_n$ は1次従属である

$\because$ まず, 仮定より.

$$a_1 = c_{11}b_1 + c_{21}b_2 + \cdots + c_{m1}b_m$$

$$a_2 = c_{12}b_1 + c_{22}b_2 + \cdots + c_{m2}b_m$$

$$\vdots$$

$$a_n = c_{1n}b_1 + c_{2n}b_2 + \cdots + c_{mn}b_m$$ とできる.

ここで連立方程式

$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots x_na_n$ の b_1 の係数.

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = 0 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$ を考えると.

$n > m$ であることから．この連立方程式は．

自明でない解 $d_1, \cdots, d_n$ をもつ．これより．

$$d_1 a_1 + d_2 a_2 + \cdots + d_n a_n$$

$$= d_1 c_{11} b_1 + d_1 c_{21} b_2 + \cdots + d_1 c_{m1} b_m$$

$$+ d_2 c_{12} b_1 + d_2 c_{22} b_2 + \cdots + d_2 c_{m2} b_m$$

$$\vdots$$

$$+ d_n c_{1n} b_1 + d_n c_{2n} b_2 + \cdots + d_n c_{mn} b_m$$

$= 0$ となり．$a_1, \cdots, a_n$ は1次従属である．

<u>定理4.7</u>：$\{v_1, \cdots, v_n\}$，$\{u_1, \cdots, u_m\}$ を V の基底とすると．

$n = m$ である．

$\because$ $v_1, \cdots, v_n$ は $u_1, \cdots, u_m$ の1次結合で表されているから．

補題4.6 より．$v_1, \cdots, v_n$ が1次独立であるためには

$n \leqq m$ でないといけない．

同様に $m \leqq n$ もわかるので．$n = m$ である

<u>定義</u>．V が有限個のベクトルで生成されているとき，V は有限次元であるといい．

有限次元でないときは．無限次元であるという．

さらに．有限次元のときは定理4.7より基底のベクトルの個数は一定なので．

この個数を V の次元といい，$\dim V$ で表す

また．$\dim\{0\} = 0$ と定める．

例. $\mathbb{R}^n$ は $\{e_1, \cdots, e_n\}$ を基底としてもつので.

$\dim \mathbb{R}^n = n$ である.

例題. $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+y=0 \right\}$ の次元を求めよ.

答. まず $x+y=0$ を解くと. $x=t$ とおいて $y=-t$ をえる.

$\therefore$ 一般解は $\begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ である

$\therefore V = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$ より $\dim V = 1$ である.

問題. 次の線形空間の次元を求めよ.

(1) $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+2y=0 \right\}$

(2) $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0 \right\}$

答 (1) $x+2y=0$ を解くと. $y=t$ とおいて $x=-2t$ となる.

$\therefore$ 一般解は $\begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ である

$\therefore V = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ より $\dim V = 1$ である

(2) $x+y+z=0$ を解くと. $y=t$, $z=s$ とおいて. $x=-t-s$ となる.

$\therefore$ 一般解は $\begin{bmatrix} -t-s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ である

$\therefore V = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ より $\dim V = 2$ である.