$\mathbb{R}^n$のベクトルが1次独立になる条件

$$\mathbb{R}^n \ni v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \cdots, v_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}$$ が

1次独立になる条件を考える. まず,

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_k v_k = \begin{bmatrix} r_1 a_{11} + r_2 a_{12} + \cdots + r_k a_{1k} \\ r_1 a_{21} + r_2 a_{22} + \cdots + r_k a_{2k} \\ \vdots \\ r_1 a_{n1} + r_2 a_{n2} + \cdots + r_k a_{nk} \end{bmatrix} \cdots ☆$$

であるが, 一方,

$$A = [v_1, \cdots, v_k] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \text{ と } x = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_k \end{bmatrix}$$ とおくと.

$$Ax = [v_1, \cdots, v_k] \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_k \end{bmatrix} = r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_k v_k = ☆$$ とできることから.

条件の式. $r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_k v_k = 0$ は

$Ax = 0$ と表すことができる.

つまり, この連立方程式 $Ax = 0$ が.

自明な解 $x = 0$ のみをもつ $\Rightarrow$ 1次独立.

それ以外の解をもつ $\Rightarrow$ 1次従属.

以上と命題2.9より 次を得る.

定理4.2. $v_1, \cdots, v_k$ が1次独立であるための必要十分条件は、

$A = [v_1, \cdots, v_k]$ とするとき、 $\operatorname{rank} A = k$ である.

系4.3. $v_1, \cdots, v_k$ が1次従属であるための必要十分条件は、

$\operatorname{rank} A < k$ である.

系4.4. (1) $k > n$ ならば、$v_1, \cdots, v_k$ はつねに1次従属.

(2) $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^n$ について、次は同値.

(a) $v_1, \cdots, v_n$ は1次独立

(b) $\operatorname{rank} A = n$

(c) $|A| \neq 0$

(d) A は正則行列

定理3.19より

例題. $\mathbb{R}^3$ のベクトル $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ が1次独立であるか調べよ.

答 $A = [a, b, c] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ として、rank A を調べると、

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2\text{行}-1\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3\text{行}-2\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ となるので、

$\operatorname{rank} A = 3$ である. $\therefore$ a, b, c は1次独立である.

問題. 次のベクトルが1次独立であるか調べよ.

(1). $a=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

(2) $a=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, $c=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$

(3) $a=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$, $c=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$

答 (1) $A=[b, a]=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$ とすれば, $\mathrm{rank}\,A=2$ より

a, b は1次独立である

(2) $A=[a, b, c]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 1 & -1\end{bmatrix}$ とすれば, $\mathrm{rank}\,A=2$ より

a, b, c は1次従属である

(3) $A=[a, b, c]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\2 & -1 & 1\\1 & 1 & -2\end{bmatrix}$ とすれば, $\mathrm{rank}\,A=3$ より

a, b, c は1次独立である.