No.

<u>命題 4.1</u>. V の部分空間 W_1, W_2 に対し.

$W_1 \cap W_2$ は部分空間である.

∵ $x, y \in W_1 \cap W_2$ とすると. $x, y \in W_1$ かつ $x, y \in W_2$ である.

∴ 任意のスカラー r に対して.

$r \cdot x \in W_1$ かつ $rx \in W_2$ より. $rx \in W_1 \cap W_2$

$x+y \in W_1$ かつ $x+y \in W_2$ より $x+y \in W_1 \cap W_2$ である.

∴ $W_1 \cap W_2$ は部分空間である.

<u>注意</u>. $W_1 \cup W_2$ は一般には部分空間にはならない.

<u>定義</u>. V の部分空間 W_1, W_2 に対し.

$W_1 + W_2 = \{ w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 \}$

は. V の部分空間である.

これを. W_1 と W_2 の和空間あるいは和という

また. $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ のとき、$W_1 + W_2$ を W_1 と W_2 の直和といい.

$W_1 \oplus W_2$ と書く.

<u>例</u>. (1). $a, b \in V$ に対し. $W_1 = \langle a \rangle$, $W_2 = \langle b \rangle$ とかくと.

$W_1 + W_2 = \langle a, b \rangle$ である

(2). $\mathbb{R}^3$ の部分空間を $W_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$, $W_2 = \langle e_2, e_3 \rangle$ とすると.

$\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$ だが. これは直和ではない.

定義. Vの空でない部分集合 Wが以下の(1),(2)をみたすとき、

WをVの部分空間という.

(1) $x, y \in W$ ならば, $x+y \in W$

(2) $x \in W$, rをスカラーとするとき, $rx \in W$.

例. (1). $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$ を $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ と同一視することにより.

$\mathbb{R}^{n-1}$は$\mathbb{R}^n$の部分空間になる.

(2). $v_1, \cdots, v_n \in V$ に対し. これらの1次結合全体

$\{s_1 v_1 + s_2 v_2 + \cdots + s_n v_n \mid s_1, \cdots, s_n$ はスカラー$\}$

は部分空間になる.

これを. $v_1, \cdots, v_n$ により生成される部分空間、または. 張られる部分空間といい.

$\langle v_1, \cdots, v_n \rangle$ と書く.

問題 (2)を示せ.

答. $s_1 v_1 + \cdots + s_n v_n$ と $t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$ に対して.

$(s_1 v_1 + \cdots + s_n v_n) + (t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n)$

$= (s_1 + t_1) v_1 + \cdots + (s_n + t_n) v_n. \in \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$

また. スカラーr に対して.

$r \cdot (s_1 v_1 + \cdots + s_n v_n) = r s_1 v_1 + \cdots + r s_n v_n \in \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$ となるので.

$\langle v_1, \cdots, v_n \rangle$ は部分空間である.

例題 (1) $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \; x+y+z=0 \right\}$, $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \; x=y=z \right\}$

とおくとき、W_1, W_2 を $\langle a, b \rangle$ のような形で表せ.

(2). $W_1 \cap W_2$ を求めよ.

答(1) W_1 は $x+y+z=0$ をみたす (x, y, z) をあつめたものなので.

方程式 $x+y+z=0$ の解が. W_1 になっている.

∴ この方程式の一般解を求めると.

$y=s$, $z=t$ とおいて. $x=-s-t$ を得る.

これより一般解は.

$$\begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ となる.

これより $W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ である.

同様に. W_2 の一般解は.

$\begin{bmatrix} s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ となるので. $W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ である

(2) $W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \; \begin{matrix} x+y+z=0 \\ x=y=z \end{matrix} \right\}$ であるので.

方程式を解くと解は $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ だけである. ∴ $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ である.

問題. (1) $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \ x+2y=0 \right\}$, $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \ 2x+3y=0 \right\}$

とするとき、W_1, W_2 を $\langle a, b \rangle$ のような形で表せ.

(2) $W_1 \cap W_2$ を求めよ.

答. (1). $x+2y=0$ を解くと. $y=t$ とおいて. $x=-2t$ となる.

∴ 一般解は

$$\begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$ となるので、$W_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ である.

$2x+3y=0$ を解くと. $y=2t$ とおいて. $x=-3t$. となる

∴ 一般解は.

$$\begin{bmatrix} -3t \\ 2t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$ となるので、$W_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ である.

(2) $W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{l} x+2y=0 \\ 2x+3y=0 \end{array} \right\}$ であるので.

この連立方程式を解くと. 解は $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ だけである

∴ $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

基底と次元

定義. $v_1, \cdots, v_k \in V$ が次の条件をみたすとき、

ベクトルの組, $v_1, \cdots, v_k$ は **1次独立** であるという.

条件: スカラー $r_1, \cdots, r_k$ に対し.

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_k v_k = 0$$

が成り立てば, $r_1 = r_2 = \cdots = r_k = 0$ である.

また. 1次独立でないときは. $v_1, \cdots, v_k$ は **1次従属** であるという.

例題. $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ が1次独立であることを示せ.

答. $a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$ とおくと. $\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=0 \end{cases}$ より.

$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$ をえる. $\therefore$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ は1次独立である.

問題 (1). $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ が1次独立であることを示せ

(2) $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ が1次従属であることを示せ.

(3) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ が1次独立かどうか判定せよ.

答 (1) $a \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$ とおくと. $\begin{cases} 2a+3b=0 \\ a+2b=0 \end{cases}$ より

$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$ をえる $\therefore$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ は1次独立である.

(2) $a\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}=0$ を解くと. $\begin{cases}2a+3b+4c=0\\a+2b+3c=0\end{cases}$ より.

$c=t$ とおけば. $b=-2t$, $a=t$ を得る.

よって. 一般解は $t\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$ であるので. 例えば.

$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}=0$ となるので 1次従属である.

(3). $a\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$ を解くと. $\begin{cases}a-2b+c=0\\2a-c=0\\3a+b+2c=0\end{cases}$ より.

$\begin{cases}a=0\\b=0\\c=0\end{cases}$ をえる. ∴ 1次独立である.

注意 (1). 1つだけのベクトル v は $v\neq 0$ であれば 1次独立.

(2) $v_1,\cdots,v_k$ の中に零ベクトルがあれば、1次従属.

(3). $v_1,\cdots,v_k$ が 1次従属のとき. 全てが 0 ではない $r_1,\cdots,r_k$ で.

$r_1v_1+r_2v_2+\cdots+r_kv_k=0$ とできる.

例えば. $r_1\neq 0$ のとき. 式を変形すると.

$v_1=-\frac{r_2}{r_1}v_2-\frac{r_3}{r_1}v_3-\cdots-\frac{r_k}{r_1}v_k$ とできる.

これより. "$v_1,\cdots,v_k$ が 1次従属である" ことと.

"$v_1,\cdots,v_k$ のうち どれか1つのベクトルが.

他のベクトルの 1次結合で表される" ことは 同値になる.