グラム・シュミットの直交化法

定義. $v, u \in \mathbb{R}^n$ に対し. $v \cdot u = 0$ であるとき,

v と u は直交するという.

命題 4.18.

$v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^m$ を1次独立なベクトルとするとき、

以下の条件をみたす. $u_1, \cdots, u_n \in \mathbb{R}^m$ が存在する.

(1). $u_i \cdot u_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$

(2) $\langle v_1, \cdots, v_n \rangle = \langle u_1, \cdots, u_n \rangle$

とくに. $u_1, \cdots, u_n$ は1次独立.

∵ まず, $u_1 = \dfrac{1}{(v_1 \cdot v_1)^{\frac{1}{2}}} \cdot v_1$ とおけば,　これを正規化という.

$u_1 \cdot u_1 = \dfrac{1}{(v_1 \cdot v_1)} \cdot v_1 \cdot v_1 = 1$ である.

また. $\langle u_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$ もわかる.

次に. $u_2' = v_2 - (v_2 \cdot u_1) u_1$ とおくと.

v_1 と v_2 が1次独立より $u_2' \neq 0$ がわかり. また.

$u_2' \cdot u_1 = v_2 \cdot u_1 - (v_2 \cdot u_1) \cdot u_1 \cdot u_1 = 0$ がわかる.

ここで $u_2 = \dfrac{1}{(u_2' \cdot u_2')^{\frac{1}{2}}} u_2'$ とおけば,

$u_2 \cdot u_2 = 1$, $u_2 \cdot u_1 = 0$, $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$ がわかる.

以下同様にして.

$$u_k' = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} (v_k \cdot u_i)\, u_i$$

$$u_k = \frac{1}{(u_k' \cdot u_k')^{\frac{1}{2}}} u_k'$$ とおけば.

求める $u_1, \cdots, u_n$ を得ることができる.

注意 ① この証明の中で使った. $u_1, \cdots, u_n$ を構成する方法を

グラム・シュミットの直交化法という.

② この(1), (2)をみたす $u_1, \cdots, u_n$ を**正規直交系**という.

とくに $n=m$ のときは**正規直交基底**という.

例題. $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ とするとき.

グラム・シュミットの直交化法を使い. 正規直交基底を求めよ.

答. $a_1 \cdot a_1 = 3$ より $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} a_1$ とする.

$b_1 \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2$ より

$b_2' = a_2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot b_1 = a_2 - \frac{2}{3} a_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ である. $b_2' \cdot b_2' = \frac{1}{9} \cdot 42$ より

$b_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{42}} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ である.

$$a_3 \cdot b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} = 0\ , \quad a_3 \cdot b_2 = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{42}}\cdot 3 \quad \text{より}$$

$$b_3' = \begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix} - \frac{3}{\sqrt{42}}\cdot\frac{1}{\sqrt{42}}\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{42}\cdot\begin{bmatrix}-54\\27\\81\end{bmatrix} = \frac{3}{14}\cdot\begin{bmatrix}-6\\3\\9\end{bmatrix} = \frac{9}{14}\cdot\begin{bmatrix}-2\\1\\3\end{bmatrix}. \quad \text{となる}$$

$$b_3' \cdot b_3' = \left(\frac{9}{14}\right)^2\cdot 14 \quad \text{より}$$

$$b_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}\cdot\frac{14}{9}\cdot\frac{9}{14}\cdot\begin{bmatrix}-2\\1\\3\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix}-2\\1\\3\end{bmatrix} \quad \text{である.}$$

$\therefore \{b_1, b_2, b_3\}$ が求める正規直交基底である.

問題. グラム・シュミットの直交化法を使い、正規直交基底を求めよ.

(1) $a_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ a_2 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

(2). $a_1 = \begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix},\ a_2 = \begin{bmatrix}4\\3\\4\end{bmatrix},\ a_3 = \begin{bmatrix}5\\5\\5\end{bmatrix}.$

答 (1). $a_1 \cdot a_1 = 2$ より $\quad b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}a_1.$

$$a_2 \cdot b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \text{より}$$

$$b_2' = a_2 - \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot b_1 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - \frac{3}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}. \quad \text{であり}$$

$$b_2' \cdot b_2' = \frac{1}{2} \quad \text{より}$$

$$b_2 = \sqrt{2}\cdot b_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} \quad \text{である.}$$

(2) $a_1 \cdot a_1 = 9$ より. $b_1 = \frac{1}{3} a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ である.

$a_2 \cdot b_1 = 4$ より

$b_2' = a_2 - 4 \cdot b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ $b_2' \cdot b_2' = 25$ より

$b_2 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ である.

$a_3 \cdot b_1 = 5$, $a_3 \cdot b_2 = 7$ より

$b_3' = a_3 - 5 \cdot b_1 - 7 b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$ である $b_3' \cdot b_3' = 1$ より

$b_3 = b_3'$ である.

$\therefore \{b_1, b_2, b_3\}$ が求める正規直交基底である.

対称行列の対角化

定義 (1) $A = {}^tA$ である n次正方行列を対称行列という.

(2) n次正方行列 B が ${}^tBB = B{}^tB = E$ をみたすとき,

Bを直交行列という.

命題．$v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^n$ が正規直交基底のとき，

$A = [v_1, \cdots, v_n]$ は直交行列になる．

逆に直交行列 B を．

$B = [u_1, \cdots, u_n]$ とおくと．$\{u_1, \cdots, u_n\}$ は正規直交基底である．

$\because$

$$ {}^tAA = \begin{bmatrix} {}^tv_1 \\ \vdots \\ {}^tv_n \end{bmatrix} [v_1, \cdots, v_n] = \begin{bmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & \cdots & v_1 v_n \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & \cdots & v_2 v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n \cdot v_1 & v_n \cdot v_2 & \cdots & v_n v_n \end{bmatrix} = E $$

よりわかる．

他については証明略．

命題 6.8．n 次対称行列 A の異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する．

定理 6.9．n 次対称行列 A は，適当な直交行列 P により

$$ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} $$

と対角化される．ただし．$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は固有値．

例題 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ を直交行列により対角化せよ．

答．$\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ -1 & t & 0 \\ -1 & 0 & t \end{vmatrix} = t^2(t-1) - t - t = t(t-2)(t+1)$

より．固有値は 2 と 0 と -1 である．

また，対称行列なので対角化可能である．

固有値 2の 固有ベクトルは.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ より. $a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ があげられる.

固有値 0の 固有ベクトルは.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$ より $a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ があげられる.

固有値−1の 固有ベクトルは.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ より $a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ があげられる.

a_1, a_2, a_3 は 命題 6.8 より 直交しているので.

$$b_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\quad b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$ とおけば.

$\{b_1, b_2, b_3\}$ は 正規直交基底 であるので.

$$P = [b_1, b_2, b_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$ とおけば 直交行列 であり.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ となる.

No.

問題. 次の行列を直交行列により対角化せよ.

(1) $A=\begin{bmatrix}1&4\\4&1\end{bmatrix}$ (2) $B=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&3&1\\0&1&2\end{bmatrix}$

答(1) Aは対称行列より対角化可能である.

$\varphi_A(t)=\begin{vmatrix}t-1&-4\\-4&t-1\end{vmatrix}=(t-1)^2-16=(t-5)(t+3)$ より

固有値は 5 と −3 である.

固有値5の固有ベクトルは. $a_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

固有値−3の固有ベクトルは. $a_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ である.

$\therefore b_1=\frac{1}{\sqrt{2}}a_1$, $b_2=\frac{1}{\sqrt{2}}a_2$ として.

$P=[b_1, b_2]=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$ とすれば、これは直交行列で.

$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}5&0\\0&-3\end{bmatrix}$ となる.

(2) Bは対称行列より対角化可能である.

$\varphi_B(t)=\begin{vmatrix}t-2&-1&0\\-1&t-3&-1\\0&-1&t-2\end{vmatrix}=(t-2)^2(t-3)-2(t-2)=(t-2)(t-1)(t-4)$ より

固有値は, 1, 2, 4 である.

固有値1の固有ベクトルは $a_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

固有値 2の 固有ベクトルは

$$a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

固有値 4の 固有ベクトルは

$$a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

より

$b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} a_1$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} a_2$, $b_3 = \frac{1}{2} a_3$ とし.

$P = [b_1, b_2, b_3]$ とすれば これは直交行列で.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

となる.