<u>例題</u>. 次の行列が対角化可能か判定し.

可能であれば対角化せよ.

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$$

答. $\varphi_A(t)=\begin{vmatrix}t-2&-1\\-1&t-2\end{vmatrix}=(t-2)^2-1=t^2-4t+3=(t-1)(t-3)$

∴ 固有値は1と3である.

異なる2つの固有値をもつので, 系6.6より対角化可能である.

対角化するために, 固有値1の固有ベクトルを求めると.

$\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ より. $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ が固有ベクトルである.

固有値3の固有ベクトルを求めると.

$\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ が固有ベクトルである.

∴ $P=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$ とすれば

$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}$ となる

実際 $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$ であるから

$$P^{-1}AP=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0\\0&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}$$ である.

No.

<u>問題</u> 次の行列が対角化可能かどうか判定し

可能なら対角化せよ.

(1) $A=\begin{bmatrix}1&3\\3&1\end{bmatrix}$ (2) $B=\begin{bmatrix}2&-2&0\\1&-3&1\\0&-2&2\end{bmatrix}$

答 (1) $\varphi_A(t)=\begin{vmatrix}t-1&-3\\-3&t-1\end{vmatrix}=(t-1)^2-9=t^2-2t-8=(t-4)(t+2)$

より固有値は 4 と -2 である.

異なる2つの固有値をもつので, A は対角化可能である.

ここで, 固有値 4 の固有ベクトルは

$\begin{bmatrix}1&3\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ がとれる.

固有値 -2 の固有ベクトルは.

$\begin{bmatrix}1&3\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ がとれる

$\therefore P=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$ とおけば.

$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}4&0\\0&-2\end{bmatrix}$ となる.

(2) $\varphi_B(t)=\begin{vmatrix}t-2&2&0\\-1&t+3&-1\\0&2&t-2\end{vmatrix}=(t-2)^2(t+3)+2(t-2)+2(t-2)$

$=(t-2)(t^2+t-6+4)=(t-2)(t+2)(t-1)$

より. 固有値は 1 と 2 と -2 である.

異なる3つの固有値をもつので, B は対角化可能である.

ここで固有値1の固有ベクトルは.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ より $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ がとれる.

固有値2の固有ベクトルは.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ より $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ がとれる

固有値−2の固有ベクトルは.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ より $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ がとれる

$\therefore P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ とおけば.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$ である.

例題．次の行列が対角化可能か判定し，

可能であれば対角化せよ．

$$A=\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ 1 & -3 & 1\\ 2 & -2 & 0\end{bmatrix}.$$

答．$\varphi_A(t)=\begin{vmatrix}t & 2 & -2\\ -1 & t+3 & -1\\ -2 & 2 & t\end{vmatrix}=t^2(t+3)+4+4+2t+2t-4(t+3)$

$$=t^3+3t^2-4=(t-1)(t+2)^2$$

∴ 固有値は 1 と −2 である．

固有値 −2 の固有空間の次元が 2 であれば，対角化可能である．

$$\mathrm{rank}(-2E-A)=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}-2 & 2 & -2\\ -1 & 1 & -1\\ -2 & 2 & -2\end{bmatrix}=1$$ より．

$\dim V(-2)=2$ であるので，対角化可能である．

ここで，固有値 1 の固有ベクトルを求めると

$$\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ 1 & -3 & 1\\ 2 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$ より $\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$ が固有ベクトルである．

固有値 −2 の 1 次独立な固有ベクトルを 2 つ求めると．

$$\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ 1 & -3 & 1\\ 2 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$ より $\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$ をえる

∴ $P=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$ とすれば，$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$ である．

問題　次の行列が対角化可能か判定し，

可能であれば，対角化せよ．

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　　(2) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

答 (1) $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^3$　より．

固有値は 1 である．

ここで，$\mathrm{rank}(E-A) = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$　より．

$\dim V(1) = 2$　となるので，対角化できない．

(2). $\varphi_B(t) = \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^3 - 2 - 3(t-2) = t^3 - 6t^2 + 9t - 4$

$= (t-1)^2(t-4)$

より固有値は 1 と 4 である．

ここで $\mathrm{rank}(E-A) = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 1$　より

$\dim V(1) = 2$　となるので対角化可能である．

固有値 1 の 1 次独立な 2 つの固有ベクトルは

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$　より　$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$　である．

No.

固有値 4 の固有ベクトルは、

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ より $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ である。

$\therefore$ $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ とおけば、

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ となる。