No.

<u>命題</u>　A を n 次正方行列，λ を A の固有値．
k を固有値 λ の重複度とするとき，
$\dim V(\lambda) \leqq k$　である．

☺ $\dim V(\lambda) \geqq k+1$ と仮定し，

$x_1, \cdots, x_{k+1} \in V(\lambda)$ を $V(\lambda)$ の基底となるようにとり，
$y_1, \cdots, y_{n-k-1} \in \mathbb{R}^n$ を $\{x_1, \cdots, x_{k+1}, y_1, \cdots, y_{n-k-1}\}$ が
$\mathbb{R}^n$ の基底となるようにとる．ここで，

$$P = [x_1, \cdots, x_{k+1}, y_1, \cdots, y_{n-k-1}]$$ とおくと，

$$\begin{aligned} AP &= A \cdot [x_1, \cdots, x_{k+1}, y_1, \cdots, y_{n-k-1}] \\ &= [Ax_1, \cdots, Ax_{k+1}, Ay_1, \cdots, Ay_{n-k-1}] \\ &= [\lambda x_1, \cdots, \lambda x_{k+1}, Ay_1, \cdots, Ay_{n-k-1}] \end{aligned}$$ より，

$$\begin{aligned} \varphi_A(t) \cdot |P| &= |(tE-A)P| \\ &= \left| [tx_1, \cdots, tx_{k+1}, ty_1, \cdots, ty_{n-k-1}] - [\lambda x_1, \cdots, \lambda x_{k+1}, Ay_1, \cdots, Ay_{n-k-1}] \right| \\ &= \left| [(t-\lambda)x_1, \cdots, (t-\lambda)x_{k+1}, (tE-A)y_1, \cdots, (tE-A)y_{n-k-1}] \right| \\ &= (t-\lambda)^{k+1} \cdot \left| [x_1, \cdots, x_{k+1}, (tE-A)y_1, \cdots, (tE-A)y_{n-k-1}] \right| \end{aligned}$$

となるので，重複度は $k+1$ 以上になってしまうため矛盾．
$\therefore \dim V(\lambda) \leqq k$　である．

No.

例題．$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ の固有値とその重複度．また固有空間の次元を求めよ．

答．$\varphi_A(t)=\begin{vmatrix}t-1&-1&-1\\0&t-1&-1\\0&0&t-1\end{vmatrix}=(t-1)^3$ より．固有値は 1．その重複度は 3 である．

また $\mathrm{rank}(E-A)=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}0&-1&-1\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}=2$ より．

$\dim V(1)=1$ である．

問題 次の行列の固有値とその重複度．また固有空間の次元を求めよ．

(1) $A=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$ (2) $B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ (3) $C=\begin{bmatrix}-3&0&0\\4&5&-4\\2&4&-5\end{bmatrix}$

答(1)．$\varphi_A(t)=\begin{vmatrix}t-2&-1\\-1&t-2\end{vmatrix}=(t-2)^2-1=(t-1)(t-3)$ より．

固有値は 1 と 3．その重複度はともに 1 である．

また定理6.4 より $\dim V(1)=\dim V(3)=1$ である．

(2)．$\varphi_B(t)=\begin{vmatrix}t-1&0&-1\\0&t-1&0\\0&0&t-1\end{vmatrix}=(t-1)^3$ より 固有値は 1．その重複度は 3 である．

また $\mathrm{rank}(E-A)=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=1$ より

$\dim V(1)=2$ である

(3). $\varphi_C(t) = \begin{vmatrix} t+3 & 0 & 0 \\ -4 & t-5 & 4 \\ -2 & -4 & t+5 \end{vmatrix} = (t+3)\begin{vmatrix} t-5 & 4 \\ -4 & t+5 \end{vmatrix} = (t+3)\left((t-5)(t+5)+16\right)$

$= (t+3)^2(t-3)$

より固有値は 3 と −3 , 3の重複度は 1, −3の重複度は 2 である.

また. $\mathrm{rank}(-3E-C) = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -8 & 4 \\ -2 & -4 & 3 \end{bmatrix} = 1$ より.

$\dim V(-3) = 2$ である.

また.さきほどの命題より $\dim V(3) = 1$ である.

行列の対角化

n 次正方行列 A に対し.ある n 次正則行列 P が存在して.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a_1 & & & O \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_n \end{bmatrix}$$ と変形できるとき,

A は 対角化可能 であるという.

また. A は P によって 対角化される という.

定理 6.5. $\varphi_A(t) = (t-\lambda_1)^{n_1}\cdot(t-\lambda_2)^{n_2}\cdot\cdots\cdot(t-\lambda_k)^{n_k}$ であるとする.

ただし. $\lambda_i \neq \lambda_j \ (i \neq j)$, $n_i \geqq 1$, $n_1+n_2+\cdots+n_k = n$ とする.このとき次は同値.

(1). A は対角化可能

(2) n 個の 1 次独立な A の固有ベクトルが存在する.

(3) $\mathbb{R}^n = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_k)$

(4) $\dim V(\lambda_i) = n_i \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$

(5) $\mathrm{rank}(\lambda_i E - A) = n - n_i \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$

No.

∵ (1)⇒(2). 正則行列 P が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{bmatrix}$$ とできたとする.

$P = [p_1, p_2, \cdots, p_n]$ と列ベクトルを使って表すと.

$$AP = P \begin{bmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{bmatrix} = [p_1, \cdots, p_n] \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix} = [a p_1, \cdots, a_n p_n]$$ となる.

∴ $AP = [Ap_1, Ap_2, \cdots, Ap_n]$ より $Ap_i = a_i p_i$ となり.

a_i は A の固有値, p_i は A の固有ベクトルである.

さらに. $p_1, \cdots, p_n$ は P が正則行列であるから 1次独立である

(2)⇒(3). $p_1, \cdots, p_n$ を 1次独立な固有ベクトルとすると.

$p_1, \cdots, p_n$ は $V(\lambda_1), \cdots, V(\lambda_k)$ のどれかに含まれる.

定理 6.4 より. $V(\lambda_i) \cap V(\lambda_j) = \{0\}$ $(i \neq j)$ であるので.

$\mathbb{R}^n \supset V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_k) \supset \langle p_1, p_2, \cdots, p_n \rangle = \mathbb{R}^n$ より.

$\mathbb{R}^n = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_k)$ である.

(3)⇒(4) $\mathbb{R}^n = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_k)$ より.

$n = \dim V(\lambda_1) + \dim V(\lambda_2) + \cdots + \dim V(\lambda_k)$ である.

命題より. $\dim V(\lambda_i) \leqq n_i$ であり.

$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ であるので.

$\dim V(\lambda_i) = n_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ となる.

(4)⇔(5). $\dim V(\lambda_i) = n - \mathrm{rank}(\lambda_i E - A)$ より求まる.

(4)⇒(1)

$V(\lambda_i)$ の基底を、$\{p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{in_i}\}$ とする.

今. $P = [p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{1n_1}, p_{21}, \cdots, p_{kn_k}]$ とおくと. これは正則行列で.

↑この中のm番目のもの. $V(\lambda_s)$ に属しているとする

$P^{-1}APe_m = P^{-1}A\,p_{ij} = P^{-1}\lambda_s p_{ij} = \lambda_s \cdot e_m$ となるので.

これを行列で表せば.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \overbrace{\lambda_1 \ \ddots \ \lambda_1}^{n_1\text{個}} & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_k \end{bmatrix}$$

となる.

系6.6. A が相異なる n 個の固有値をもてば、A は対角化可能

例題. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ が対角化可能かどうか判定し.

可能であれば対角化せよ.

答 $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-2 & 2 & 0 \\ -1 & t+3 & -1 \\ 0 & 2 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2(t+3) + 2(t-2) + 2(t-2)$

$= (t-2)(t+2)(t-1)$

∴相異なる3つの固有値をもつので、対角化可能である.

ここでそれぞれの固有ベクトルを求めると.

$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ が1に属する固有ベクトルになる.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ より $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ が 2 に属する固有ベクトルになる.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ より $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ が -2 に属する固有ベクトルになる

$\therefore$ $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ とおけば.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$ となる.

問題. 次の行列が対角化可能か判定し、可能であれば対角化せよ.

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$　(2) $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

答 (1) $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-2 & -1 \\ -1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-3)(t-1)$ より. 対角化可能である.

それぞれの固有ベクトルを求めると.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ より $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ が 1 に属する固有ベクトルになる.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ より $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ が 3 に属する固有ベクトルになる.

$\therefore$ $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ とおけば.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$ となる.