No.

<u>復習</u>. A を (n,n) 行列, $u \in \mathbb{R}^n$ とする.

$Au = \lambda u \quad (\Leftrightarrow (\lambda E - A)u = 0)$ をみたすとき,

λ を A の固有値, u を λ に属する固有ベクトルという.

$V(\lambda) = \ker(\lambda E - A) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\lambda E - A)x = 0 \}$

を固有値 λ に対する固有空間という.

<u>例題</u> $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値と固有値 1 に対する固有空間を求めよ.

<u>答</u>. 固有多項式は.

$$\varphi_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \cdot \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 \\ -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)((\lambda+1)^2 - 4) = (\lambda-1)^2(\lambda+3)$$

であるので, 固有値は. $\varphi_t(A) = 0$ の解である 1 と -3 である.

固有値 1 に対する固有空間は.

$$V(1) = \ker(E - A) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\}$$ であるので.

この連立方程式を解くと. $\begin{cases} -x + 2y = x \\ 2x - y = y \\ \qquad z = z \end{cases}$ より. $x = y$ となり.

$y = t$, $z = s$ とおいて一般解は.

$\begin{bmatrix} t \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ となるので $V(1) = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ である.

問題 次の行列の固有値と、それぞれの固有値に対する固有空間を求めよ.

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (2) $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

答 (1) $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-2 & -2 \\ -1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-1)(t-4)$ より

Aの固有値は 1 と 4 である.

$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を解くと. $\begin{cases} 2x+2y = x \\ x+3y = y \end{cases}$ より $x = -2y$ となる

よって. $y = s$ とおけば、一般解は $\begin{bmatrix} -2s \\ s \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ となり

$V(1) = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ である.

$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を解くと. $\begin{cases} 2x+2y = 4x \\ x+3y = 4y \end{cases}$ より $x = y$ となる.

よって. $y = s$ とおけば、一般解は $\begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ となり

$V(4) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ である.

(2) $\varphi_B(t) = \begin{vmatrix} t & -2 & 0 \\ 2 & t-1 & -3 \\ 0 & -2 & t \end{vmatrix} = t^2(t-1) + 4t - 6t = t^3 - t^2 - 2t$

$= t(t-2)(t+1)$ より

固有値は 0 と -1 と 2 である.

No.

$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ を解くと. $\begin{cases} 2y = 0 \\ -2x + y + 3z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$ より $2x = 3z$ となる.

よって. $z = 2s$ とおけば、一般解は $\begin{bmatrix} 3s \\ 0 \\ 2s \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ となり

$V(0) = \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$ である.

$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ を解くと $\begin{cases} 2y = -x \\ -2x + y + 3z = -y \\ 2y = -z \end{cases}$ より $\begin{cases} x = z \\ x = -2y \end{cases}$ となる

よって. $y = s$ とおけば、一般解は $\begin{bmatrix} -2s \\ s \\ -2s \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ となり

$V(-1) = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle$ である.

$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ を解くと. $\begin{cases} 2y = 2x \\ -2x + y + 3z = 2y \\ 2y = 2z \end{cases}$ より $x = y = z$ となる.

よって. $x = s$ とおけば、一般解は $\begin{bmatrix} s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ となり

$V(2) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ である

次の2つの定理は証明せずに用いる.

定理5.5. Aを(n,n)行列とするとき,

$n = \dim \mathrm{Im} A + \dim \ker A$ が成り立つ.

定理5.11. Aを(n,n)行列とするとき,

$\mathrm{rank} A = \dim \mathrm{Im} A$ が成り立つ.

命題6.2. Aを(n,n)行列, Pをn次正則行列とするとき,

(1) $\varphi_A(t) = \varphi_{P^{-1}AP}(t)$

(2) Aの固有値と$P^{-1}A\cdot P$の固有値は等しい.

(3) λをAの固有値とするとき,

$$\dim V(\lambda) = n - \mathrm{rank}(\lambda E - A)$$

(4) $\varphi_A(t) = \varphi_{{}^tA}(t)$

∵ (1) $\varphi_{P^{-1}AP}(t) = |tE - P^{-1}AP| = |t \cdot P^{-1} E \cdot P - P^{-1}AP|$

$$= |P^{-1}(tE-A)P| = |P^{-1}| \cdot |tE-A| \cdot |P|$$

$$= |P|^{-1} |tE-A| \cdot |P| = |tE-A| = \varphi_A(t)$$

(2) (1)より明らか.

(3) $\dim V(\lambda) = \dim \ker(\lambda E - A) = n - \dim \mathrm{Im}(\lambda E - A)$

$$= n - \mathrm{rank}(\lambda E - A)$$

(4) $\varphi_{{}^tA}(t) = |tE - {}^tA| = |{}^t(tE-A)| = |tE-A|$

$$= \varphi_A(t)$$

No.

定理 6.4. Aを (n,n) 行列 とするとき、

(1) Aの異なる固有値に属する固有ベクトルは 1次独立である.

(2) λ_i, λ_j を Aの異なる固有値とするとき、 $V(\lambda_i) \cap V(\lambda_j) = \{0\}$.

(3) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ を Aの相異なる固有値 とするとき、$\dim V(\lambda_i) = 1$ である.

(1). 帰納法で証明する.

$m=1$ のときは ベクトルが 1つだけなので 1次独立である.

今. $\lambda_1, \cdots, \lambda_{k+1}$ を相異なる固有値, $x_1, \cdots, x_{k+1}$ をそれぞれの固有値に属する固有ベクトル とする.

$x_1, \cdots, x_k$ が 1次独立であることを仮定して. $x_1, \cdots, x_{k+1}$ が 1次独立であることを示す.

もし. $x_1, \cdots, x_{k+1}$ が 1次独立でないとすると.

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_{k+1} x_{k+1} = 0$ が自明でない解をもつ.

この解は $x_1, \cdots, x_k$ が 1次独立であることから. $a_{k+1} \neq 0$ がわかる. よって.

$x_{k+1} = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_k x_k$ と変形できる.

この両辺に Aをかけると.

$$\lambda_{k+1} x_{k+1} = \lambda_1 b_1 x_1 + \lambda_2 b_2 x_2 + \cdots + \lambda_k b_k x_k.$$

また. λ_{k+1} をかけると

$$\lambda_{k+1} x_{k+1} = \lambda_{k+1} b_1 x_1 + \lambda_{k+1} b_2 x_2 + \cdots + \lambda_{k+1} b_k x_k$$ となる.

これをまとめると.

$$(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) b_1 x_1 + (\lambda_2 - \lambda_{k+1}) b_2 x_2 + \cdots + (\lambda_k - \lambda_{k+1}) b_k x_k = 0$$ となる

ここで、$x_1, \cdots, x_k$ が1次独立であることから、

$(\lambda_1 - \lambda_{k+1})b_1 = (\lambda_2 - \lambda_{k+1})b_2 = \cdots = (\lambda_k - \lambda_{k+1})b_k = 0$ がわかるが、

$\lambda_1, \cdots, \lambda_{k+1}$ は異なる固有値であるので、

$b_1 = b_2 = \cdots = b_k = 0$ となる。

これより $x_{k+1} = 0$ となり矛盾。

$\therefore$ $x_1, \cdots, x_{k+1}$ は1次独立である。

(2). $V(\lambda_i) \cap V(\lambda_j) \neq \{0\}$ として、$V(\lambda_i) \cap V(\lambda_j) \ni x \neq 0$ とおくと、

(1) より、x、x は1次独立でないといけないが、これは明らかに矛盾。

$\therefore$ $V(\lambda_i) \cap V(\lambda_j) = \{0\}$

(3). $V(\lambda_i) \ni x_i \neq 0$ とすると、$\{x_1, \cdots, x_n\}$ は基底になる。

今、$V(\lambda_1) \ni x'$ とすると、

$x' = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$ とできるが、これを変形して、

$1 \cdot (a_1 x_1 - x') + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0$ となる。

もし、$a_1 x_1 - x' \neq 0$ なら、(1) から、$a_1 x_1 - x', x_2, x_3, \cdots, x_n$ は

1次独立でないといけないので矛盾である。

$\therefore$ $a_1 x_1 - x' = 0$ であり、$x' \in \langle x_1 \rangle$ となる

$\therefore$ $V(\lambda_1) = \langle x_1 \rangle$ より、$\dim V(\lambda_1) = 1$ である。