§1. 線形空間

<u>定義</u> 空でない集合 V に下の(I),(II)をみたす. 和、定数倍(スカラー倍)が

与えられているとき, V を**線形空間**といい

Vの元を**ベクトル**という.

また. x が Vの元であるということを $x \in V$ という記号で表す.

(I) 任意の $x, y, z \in V$ に対して. 次が成り立つ.

(1) $x+y=y+x$ (交換法則)

(2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (結合法則)

(3) 任意の $x \in V$ に対し.

$x+\mathbb{0}=x$ となるベクトル $\mathbb{0}$ が存在する

このベクトルを**零ベクトル**という.

(4) 任意の $x \in V$ に対し.

$x+(-x)=\mathbb{0}$ となるベクトル $-x$ が存在する

これを x の**逆ベクトル**という.

(II) 任意の $x, y \in V$ と. スカラー s, r に対し、次が成り立つ.

(1) $(r+s)x=rx+sx$

(2) $r(x+y)=rx+ry$

(3) $(rs)x=r\cdot(sx)$

(4) $1\cdot x=x$

注意．スカラーとして実数を使うときは．実線形空間といい．

複素数を使うときは．複素線形空間という．

例．(1)　n項ベクトルの集合

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| \ x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$ は．

和　$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix}$$

スカラー倍　$$r \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rx_1 \\ \vdots \\ rx_n \end{bmatrix}$$

と定義することにより．(I)，(II) をみたし線形空間になる．

(2)　(m, n)行列全体

$$M(m, n ; \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \middle| \ a_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq n \right\}$$ は．

行列の和とスカラー倍により線形空間になる．

(3)．実数$\mathbb{R}$を係数にもつxの多項式全体

$$\mathbb{R}[x] = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \mid a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N} \}$$ は

多項式の和とスカラー倍によって線形空間になる．

$\mathbb{R}^n$が線形空間であることの証明.

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ とし, rとsをスカラーとする.

(I)-(1) $x+y = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1+x_1 \\ \vdots \\ y_n+x_n \end{bmatrix} = y+x$ より 成立.

(I)-(2) $(x+y)+z = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+y_1+z_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n+z_n \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1+z_1 \\ \vdots \\ y_n+z_n \end{bmatrix} = x+(y+z)$ より成立.

(I)-(3) $\mathbb{0}$ ベクトルとして. $\mathbb{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ を とると.

$x+\mathbb{0} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x$ より成立.

問題 (I)-(4) を示せ.

答. xの逆ベクトルとして. $-x = \begin{bmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix}$ をとると.

$x+(-x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbb{0}$ より成立.

(II) については省略.

<u>命題</u>. Vを線形空間とするとき. 次が成立する.

(1). $\mathbb{0}$ベクトルはただ1つである.

(2). $x \in V$に対する逆ベクトルはただ1つである.

(3). $x, y \in V$に対して. $x = y + z$をみたすベクトルがただ1つ存在する.

(4) $0 \cdot x = \mathbb{0}$, $r \cdot \mathbb{0} = \mathbb{0}$, $(-1)x = -x$.

∵ (1). $\mathbb{0}, \mathbb{0}'$を零ベクトルとすると.

$\mathbb{0} = \mathbb{0} + \mathbb{0}' = \mathbb{0}'$ となるので成立.

(2). $-x, -x'$をxの逆ベクトルとすると.

$-x = -x + \mathbb{0} = -x + x + -x' = -x'$ となるので成立.

(3). $z = x + (-y)$ とすればよい.

また z' をこれをみたすベクトルとすると.

$z' = z' + \mathbb{0} = z' + y + (-y) = x + (-y) = z$ となるので成立.

<u>問題</u>. (4)を証明せよ.

答. $0x + 0 \cdot x = 0x$ より. $0x = \mathbb{0}$ となる

$r \cdot \mathbb{0} = r \cdot 0 \cdot \mathbb{0} = 0 \cdot \mathbb{0} = \mathbb{0}$

$x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0 \cdot x = \mathbb{0}$ である.

定義. $v_1, \cdots, v_n \in V$ と. スカラー $s_1, \cdots, s_n$ に対して. 定義される V のベクトル

$$v = s_1 v_1 + s_2 v_2 + \cdots + s_n v_n$$

を. $v_1, \cdots, v_n$ の 1次結合 という.

V の全てのベクトルが $v_1, \cdots, v_n$ の 1次結合で表すことができるとき,

$\{v_1, \cdots, v_n\}$ を V の 生成系 という.

例. $\mathbb{R}^3$ において. $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は $\mathbb{R}^3$ の生成系になっている.

∵ 任意の $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して.

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + z \cdot e_3$$ と表せるので.

$\{e_1, e_2, e_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の生成系である.

問題. $\mathbb{R}^2$ において. $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ が $\mathbb{R}^2$ の生成系になっていることを示せ.

答. 任意の $u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して.

$$u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x - y) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ と表せるので.

$\{v_1, v_2\}$ は $\mathbb{R}^2$ の生成系である.