二項分布

例1. $\frac{1}{10}$ の確率で当りの出るアイスを5本買うとき.
当たりが2本出る確率はいくらか.

答. ${}_5C_2 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^3 = \frac{1}{10^5} \cdot \frac{5!}{3!2!} \cdot 9^3 = 0.0729$ となる.

これをより一般的に考えると.次のようになる

[二項分布]. 1回の試行で.ある事象Aが起る確率が p であるとき.
n 回試行をくり返して. Aが起る回数を X とすると この確率は

$$P(X=x) = {}_nC_x \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \qquad (x=0,1,2,\cdots,n)$$

で与えられる.

このとき X は 二項分布 $B(n,p)$ に従う という

定理1.9.1. 二項分布 $B(n,p)$ に従う X について

$E(X)=n\cdot p$. $V(X)=np(1-p)$ が成り立つ

∵ n 回の試行の一回ずつをそれぞれ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とすると

$P(X_i=1)=p$, $P(X_i=0)=1-p$ とできるので.

$E(X_i) = p\cdot 1 + (1-p)\cdot 0 = p$

$V(X_i) = p\cdot 1^2 + (1-p)\cdot 0^2 - p^2 = p(1-p)$ である.

今. $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ であるので.

$E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = np$.

$V(X) = V(X_1) + \cdots + V(X_n) = np(1-p)$ となる

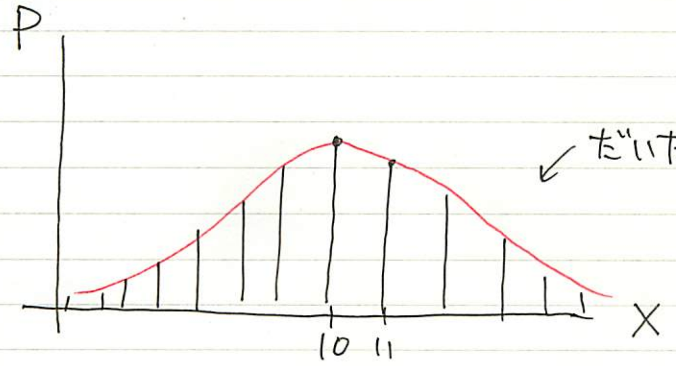
nが大きくなると、次の定理が有用。

定理1.9.2. Xが$B(n, p)$に従うとき、

$E(X)=np$が5以上であれば、Xは近似的に

$N(np, np(1-p))$に従う。

例えば、コイントスを20回やったときに表が出る回数をXとすると、



だいたい$N(10, 5)$に一致。

定理1.9.3.

$$P(a \leqq X \leqq b)_{B(n,p)} \fallingdotseq P\left(a-\frac{1}{2} \leqq X \leqq b+\frac{1}{2}\right)_{N(np, np(1-p))}$$ とできる。

例. $\frac{1}{10}$で当たるくじ付きアイスを60本買うとき、10本以上当りが出る確率はいくらか。

答 Xは$B(60, 0.1)$に従う。$E(X)=60\times0.1=6 \geqq 5$より、

Xは$N\left(6, \frac{54}{10}\right)$に従うとしてよい。

$$\therefore P(10 \leqq X)_{B(60, 0.1)} = P(9.5 \leqq X)_{N(6, 5.4)}$$

$$= P\left(\frac{9.5-6}{\sqrt{5.4}} \leqq Z\right)_{N(0,1)}$$

$$= P(1.51 \leqq Z)_{N(0,1)}$$

$$= 0.5 - 0.4345 = 0.0655$$ となる

問題 (1) コイントスを100回行うとき，60回以上表の確率を求めよ

(2) 命中率0.65の射撃手が10発うつとき次を求めよ

(i) 7発以上命中させる確率

(ii) 命中が3発以下の確率

答 (1). $P(60 \leqq X)_{B(100,\frac{1}{2})} = P(59.5 \leqq X)_{N(50,25)}$

$= P\left(\frac{59.5-50}{5} \leqq X\right)_{N(0,1)} = P(1.9 \leqq X)$

$= 0.5 - 0.4713 = 0.0287$ である

(2)(i) $P(7 \leqq X)_{B(10,0.65)} = P(6.5 \leqq X)_{N(6.5,2.275)}$

$= P\left(\frac{6.5-6.5}{\sqrt{2.275}} \leqq X\right)_{N(0,1)} = 0.5$

(ii) $P(X \leqq 3)_{B(10,0.65)} = P(X \leqq 3.5)_{N(6.5,2.275)}$

$= P\left(\frac{3.5-6.5}{\sqrt{2.275}} \geqq X\right)_{N(0,1)} \fallingdotseq P(-2 \geqq X)_{N(0,1)} = 0.227$ である.