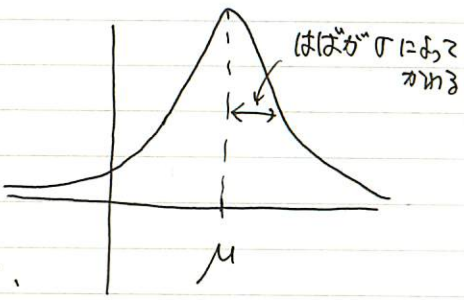
正規分布.

次の確率密度関数で表される連続型確率分布を正規分布またはガウス分布という.
(に従う ともかく)

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$



この分布のことを今後 $N(\mu, \sigma^2)$ とかく.

定理 1.8.1. 確率変数 Z が $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき,

$E(Z) = \mu$, $V(Z) = \sigma^2$ である. ← $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を用いればよい

とくに. $N(0, 1)$ ($E(Z) = 0$, $V(Z) = 1$) を標準正規分布という.

このときの確率密度関数は

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

で与えられている. ここで.

$$\Phi(z) = \int_0^z \phi(z) dz = P(0 \leqq Z \leqq z)$$

で表す.

この積分は. 計算で求められないので. 正規分布表を利用する

例. (1). $P(0 \leqq Z \leqq 0.86)$

(2) $P(-1.05 < Z < 1.29)$

(3) $P(0 < Z \leqq z) = 0.253$ をみたすz を求めよ.

答 (1) 表より 0.3051

(2) $P(-1.05 < Z < 1.29) = P(-1.05 < Z < 0) + P(0 \leqq Z < 1.29)$

$= P(0 < Z < 1.05) + P(0 \leqq Z < 1.29) = 0.3531 + 0.4015 = 0.7546$

(3) 表より 0.6840.

問題 (1) $P(-0.53 < Z < 0)$

(2) $P(Z < 1)$

(3) $P(z < Z < 0) = 0.382$ をみたす z.

答 (1) 0.2019

(2) $\frac{1}{2} + 0.3413 = 0.8413$

(3) -1.1850 である.

定理1.8.2 X が $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき. $Z = \frac{(X-\mu)}{\sigma}$ とおくと.

Z は $N(0,1)$ に従う. これより.

$P(a \leqq X \leqq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leqq Z \leqq \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$ となる.

$\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$ で. $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ で変数変換すると.

$dz = \frac{1}{\sigma} \cdot dx$ より

$\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-z^2/2} dz$ となる

例. X が $N(5, 36)$ に従うとき. $P(3 < X < 8)$

$Z = \frac{X-5}{6}$ とおくと. Z は $N(0,1)$ に従う. よって.

$P(3 < X < 8) = P\left(\frac{3-5}{6} < Z < \frac{8-5}{6}\right) \fallingdotseq P(-0.33 < Z < 0.50)$

$= 0.1293 + 0.1915 = 0.3208$ である.

問題. X が $N(2, 16)$ に従うとき.

(1) $P(0 < X < 2)$ (2) $P(X \leqq c) = 0.329$ となる c を求めよ.

答. $Z = \frac{X-2}{4}$ とすれば. Z は $N(0,1)$ に従い.

$$P(0 < X < 2) = P\left(\frac{0-2}{4} < Z < \frac{2-2}{4}\right) = P(-0.5 < Z < 0)$$
$$= 0.1915$$

$$P(X \leqq c) = P\left(Z < \frac{c-2}{4}\right) = \frac{1}{2} - 0.171$$

一方. 表より. $\frac{c-2}{4} = -0.4427$.

$\therefore c = 2 - 1.7708 = 0.2292$ である.

再生性と中心極限定理.

定理1.8.3. 互いに独立な X_1 と X_2 が $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ に従うとき、$a_1X_1 + a_2X_2$ は $N(a_1\mu_1 + a_2\mu_2,\ a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2)$ に従う.

→ 証明は簡単でないので略(モーメントを使う).

これをくり返すと.次を得る.

定理1.8.4. 互いに独立な $X_1, \cdots, X_n$ が. 全て $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき.

(i) $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ は $N(n\mu, n\sigma^2)$ に従う

(ii) $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ は $N(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$ に従う.

また次も重要.

定理1.8.5 互いに独立な $X_1, \cdots, X_n$ が 全て. $E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = \sigma^2$ をみたすとき. n が十分大きければ.

(i) $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ は ほぼ $N(n\mu, n\sigma^2)$ に従う.

(ii) $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ は ほぼ $N(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$ に従う

なお. $n \geqq 50$ くらいであれば. この定理を使ってよい

例 サイコロを 35×12 回投げたとき、平均値 $\overline{X}$ が 3.4以上 3.6以下である確率を求めよ。
420

答. $\overline{X}$ はほぼ $N\left(3.5, \frac{1}{35\cdot12}\cdot\frac{35}{12}\right)$ に従う.

$\therefore$ $Z = \dfrac{\overline{X}-3.5}{\frac{1}{12}}$ とすると. $N(0,1)$ に従い.

$$P(3.4 \leqq \overline{X} \leqq 3.6) = P(-1.2 \leqq Z \leqq 1.2) = 2\times0.3849 = 0.7698$$ である

問題. コイン投げをして.表が出たら 1, 裏がでたら 0 とする.

これを 100回くり返したとき、その平均値 $\overline{X}$ が 0.4以上 0.6以下の確率を求めよ.

答. 1回の試行を X とすると

$E(X)=0.5$, $V(X)=0.25$ より. $E(\overline{X})=0.5$ $V(\overline{X})=\left(\frac{1}{20}\right)^2$

$Z = \dfrac{\overline{X}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{20}}$ とすると. $N(0,1)$ に従い

$$P(0.4 \leqq X \leqq 0.6) = P\left(\frac{-0.1}{\frac{1}{20}} \leqq Z \leqq \frac{0.1}{\frac{1}{20}}\right) = P(-2 \leqq Z \leqq 2)$$

$$= 2\times0.4773 = 0.9546$$ である.