定理1.7.1. XとYが互いに独立ならば,

(i) $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$.

(ii) $\gamma(X,Y)=0$

(iii) $V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)$

∵ (i). 離散型の場合だけ示す

$$E(XY)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i\cdot y_j\ p_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i p_{i\cdot}\cdot y_j p_{\cdot j}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{m} x_i p_{i\cdot}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j p_{\cdot j}\right)=E(X)E(Y)$$

(ii) $\gamma(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=0$

(iii) $V(aX+bY)=a^2V(X)+2ab\gamma(X,Y)+b^2V(Y)$

$$=a^2V(X)+b^2V(Y)$$

//.

大数の法則

定理1.7.2. 確率変数 X_i $(i=1,2,\cdots,n)$ が互いに独立で,

すべての i について. $E(X_i)=\mu$, $V(X_i)=\sigma^2$ であるとする

$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ とおくと.

(1) $E(\bar{X})=\mu$

(2) $V(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$, $\sigma(\bar{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ である.

∵ (1) $E(\bar{X})=E\left(\frac{1}{n}X_1+\frac{1}{n}X_2+\cdots+\frac{1}{n}X_n\right)$

$$=\frac{1}{n}E(X_1)+\frac{1}{n}E(X_2)+\cdots+\frac{1}{n}E(X_n)$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\mu\times n=\mu$$

(2) $V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n}X_1 + \cdots + \frac{1}{n}X_n\right)$

$$= V\left(\frac{1}{n}X_1 + \cdots + \frac{1}{n}X_{n-1}\right) + \frac{1}{n^2}V(X_n)$$

$$\vdots$$

$$= \frac{1}{n^2}V(X_1) + \cdots + \frac{1}{n^2}V(X_n)$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot\sigma^2 \times n = \frac{\sigma^2}{n} \quad //.$$

回数を重ねると．期待値はかわらないが，分散は低くなる．

定理1.7.3．確率変数 Xについて．$E(X)=\mu$， $V(X)=\sigma^2$ とすると．

$k>1$ に対し．

$$P(|X-\mu| \geqq k\sigma) \leqq \frac{1}{k^2}$$ が成り立つ．

∵ 連続型のときだけ示す．

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot p(x)\,dx$$

$$= \int_{|x-\mu|\geqq k\sigma} (x-\mu)^2 \cdot p(x)\,dx + \int_{|x-\mu|\leqq k\sigma} (x-\mu)^2 p(x)\,dx$$

$$\geqq \int_{|x-\mu|\geqq k\sigma} (x-\mu)^2 p(x)\,dx \geqq \int_{|x-\mu|\geqq k\sigma} k^2\sigma^2 \cdot p(x)\,dx$$

$$= k^2\sigma^2 \int_{|x-\mu|\geqq k\sigma} p(x)\,dx = k^2\sigma^2 \cdot P(|X-\mu| \geqq k\sigma)$$

$$\therefore P(|X-\mu| \geqq k\sigma) \leqq \frac{1}{k^2}$$ である

定理1.7.4．X_iを互いに独立とし．$E(X_i)=\mu$，$V(X_i)=\sigma^2$ とする．

$\bar{X} = \sum_{i}^{n} \frac{X_i}{n}$ ，$\varepsilon > 0$ とすると．

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}-\mu| < \varepsilon) = 1.$$ が成り立つ．

∵ $P(|\bar{X}-\mu|<\varepsilon) = 1 - P(|\bar{X}-\mu| \geqq \varepsilon)$

$= 1 - P\left(|\bar{X}-\mu| \geqq \frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$\geqq 1 - \left(\frac{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{\varepsilon}\right)^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2} \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty)$ より

∴ $\lim P(|\bar{X}-\mu|<\varepsilon) = 1$ となる //

何回もくり返すと、その平均値は期待値に(ほぼ)一致する

問題 (1). 5個のサイコロを投げ、出た目の平均値を $\bar{X}$ とするとき、

$E(\bar{X})$ と $V(\bar{X})$ を求めよ.

(2) X_n を サイコロをn個投げたときの平均値とするとき.

$V(X_n)$ が $\frac{1}{2}$ 以下になるためには. nがいくつ以上であればよいか.

答 (1) X をサイコロを投げたときの目とすると.

$E(X) = \frac{7}{2}$, $V(X) = \frac{35}{12}$ であったので.

$E(\bar{X}) = \frac{7}{2}$, $V(\bar{X}) = \frac{35}{12} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{12}$ である.

(2) $V(X_n) = \frac{35}{12} \cdot \frac{1}{n}$ であるので.

$\frac{35}{12} \cdot \frac{1}{n} \leqq \frac{1}{2}$ をといて.

$n \geqq \frac{35}{6}$ より. nが6以上であればよい.