<u>問題</u>. 確率変数 X、Yの同時確率密度関数を.

$$p(x, y) = \begin{cases} (1-x)(2-y) & (0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で与えるとき、周辺確率密度関数 $p_1(x)$, $p_2(y)$ を求めよ.

<u>答</u>. $p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\, dy = \int_0^2 (1-x)(2-y)\, dy$

$= (1-x) \cdot \left[2y - \frac{1}{2}y^2 \right]_0^2 = 2(1-x)$

$p_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\, dx = \int_0^1 (1-x)(2-y) dy$

$= (2-y) \left[x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}(2-y)$ である.

同時確率があると. 例えば.

$aX+bY$ のような確率変数を考えることができる.

これは. $X = x_i$, $Y = y_j$ である確率が p_{ij} なので,

$aX+bY$ が ax_i+by_j の値をとる確率が p_{ij}. ということ.

<u>定義 1.6.1</u>. 次で定義される $\gamma(X, Y)$, $\rho(X, Y)$ を

それぞれ共分散, 相関係数 という

共分散 : $\gamma(X, Y) = E\left((X-E(X)) \cdot (Y-E(Y)) \right)$

相関係数 : $\rho(X, Y) = \gamma(X, Y) / \sigma(X) \cdot \sigma(Y)$

定理1.6.2. X、Yを確率変数，a, bを定数とすると．

(i) $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$

(ii) $\gamma(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

(iii) $V(aX+bY)=a^2V(X)+2ab\gamma(X,Y)+b^2V(Y)$　が成り立つ．

⊙ (i) 離散の場合だけ示す．

$$E(aX+bY)=\sum_{i,j}(ax_i+by_j)p_{ij}=\sum_i\left(ax_i\sum_j p_{ij}\right)+\sum_j\left(by_j\sum_i p_{ij}\right)$$

$$=a\cdot\sum_i x_i p_{i\cdot}+b\cdot\sum_j y_j p_{\cdot j}=aE(X)+bE(Y)$$

(ii) $\gamma(X,Y)=E((X-E(X))\cdot(Y-E(Y)))$

$$=E(XY-E(Y)\cdot X-E(X)\cdot Y+E(X)\cdot E(Y))$$

$$=E(XY)-E(Y)E(X)-E(X)\cdot E(Y)+E(X)\cdot E(Y)$$

$$=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$$

(iii) $V(aX+bY)=E((aX+bY-E(aX+bY))^2)$

$$=E((aX-aE(X)+bY-bE(Y))^2)$$

$$=E((a(X-E(X))+b(Y-E(Y)))^2)$$

$$=E(a^2(X-E(X))^2+2ab(X-E(X))\cdot(Y-E(Y))+b^2(Y-E(Y))^2)$$

$$=a^2V(X)+2ab\gamma(X,Y)+b^2V(Y)$$

//

確率変数の独立性.

離散型確率変数 X、Y について.

事象 A_i : $X = x_i$

事象 B_j : $Y = y_j$ とする.

この A_i と B_j が全ての i, j について独立であるとき、

XとYは互いに独立な確率変数という.

このとき.

$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$ となる.

逆にこの式が成立すれば、XとYは互いに独立な確率変数になる.

連続型の場合.

$p(x, y) = p_1(x) \cdot p_2(y)$. が独立になる条件である.

問題 (1). サイコロAとBの出た目をXとYとするとき.

上の式が成立していることを例を挙げて確かめよ.

(2) $p(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$ で与えられるとき.

XとYが独立であることを示せ. ただし. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を使ってよい

答 (1). 例えば. $X=1$, $Y=1$ を考えれば. $p_{11} = \frac{1}{36}$, $p_{1\cdot} = \frac{1}{6}$, $p_{\cdot 1} = \frac{1}{6}$ より成立する

(2). $p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dy = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ である.

同様に $p_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}$ となるので.

$p(x, y) = p_1(x) \cdot p_2(y)$ となり 独立である.