分散

$V(X)=E((X-E(X))^2)$ を X の**分散**という。また、

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ を X の**標準偏差**という。

離散のとき：$V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2\cdot p_i$

連続のとき：$V(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))^2\cdot p(x)\cdot dx$ で計算できる。

分散は、確率密度関数が、

期待値のそばで高い値をとる ⟶ 分散が低い。

期待値から遠くに広がっている ⟶ 分散が高い。

⟶ 散布度：確率の広がり具合を表す尺度になる。

定理 1.5.3

$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$ である

$\because$ $V(X)=E((X-E(X))^2)=E(X^2-2XE(X)+E(X)^2)$

$=E(X^2)-2E(X)\cdot E(X)+E(X)^2=E(X^2)-E(X)^2$

例. トランプをひいたときの数を X とするとき、分散と標準偏差を求めよ。

答. 期待値 $E(X)=7$ であった。

$\therefore V(X)=E(X^2)-E(X)^2=1^2\cdot\frac{1}{13}+2^2\cdot\frac{1}{13}+3^2\cdot\frac{1}{13}+\cdots+13^2\cdot\frac{1}{13}-49$

$=\frac{1}{13}(1+2^2+\cdots+13^2)-49$

$=\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{6}\cdot 13\cdot 14\cdot 27-49=63-49=14.$

$\sigma(X)=\sqrt{14}$ である

問題 (1) サイコロをふって出た目が X であるとき、分散と標準偏差を求めよ.

(2) $P(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$ で確率密度関数が与えられるとき、分散と標準偏差を求めよ

答 (1) 期待値 $E(X) = \frac{7}{2}$ であったので、

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - \frac{49}{4}$$
$$= (1^2 + 2^2 + \cdots + 6^2)\frac{1}{6} - \frac{49}{4}$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 13 - \frac{49}{4} = \frac{1}{12}(182 - 147) = \frac{35}{12}$$

$\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{35}{3}} \ (\fallingdotseq 1.7)$ である.

(2) 期待値 $E(X) = \frac{1}{2}$ であったので、

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 6x(1-x)\,dx - \frac{1}{4}$$
$$= \int_0^1 6x^3 - 6x^4\,dx - \frac{1}{4} = \left[\frac{3}{2}x^4 - \frac{6}{5}x^5\right]_0^1 - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{3}{2} - \frac{6}{5} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}(30 - 24 - 5) = \frac{1}{20}$$

$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{20}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$ である

定理 1.5.4. a を定数とするとき，次が成立.

(1) $V(X+a) = V(X)$ ， $\sigma(X+a) = \sigma(X)$

(2) $V(aX) = a^2 V(X)$ ， $\sigma(aX) = a \cdot \sigma(X)$

∵ (1) $V(X+a) = E\left((X+a-E(X+a))^2\right) = E\left((X+a-E(X)-a)^2\right)$
$$= E\left((X-E(X))^2\right) = V(X)$$

(2) $V(aX) = E\left((aX - E(aX))^2\right) = E\left((aX - a \cdot E(X))^2\right)$
$$= E\left(a^2(X-E(X))^2\right) = a^2 \cdot E\left((X-E(X))^2\right) = a^2 \cdot V(X)$$

確率変数 X に対し、

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$ とおくと、

$E(Z) = 0$, $V(Z) = 1$ となる。

このように、X から Z へ変換することを、X の標準化という。

同時確率分布

X、Y を離散型確率変数とし、それぞれ、x_i, y_j $(i=1,\cdots,m, j=1,\cdots,n)$ の値をとりうるとするとき、

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$$

を、X と Y の同時確率という。この p_{ij} は

- $0 \leqq p_{ij} \leqq 1$
- $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$ をみたす。

また、

$$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}, \quad p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}$$ を、

それぞれ、X、Y の周辺確率という。

さらに、$p_{i\cdot}$, $p_{\cdot j}$ は

$$\sum_{i=1}^{m} p_{i\cdot} = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} p_{\cdot j} = 1$$ をみたす。

また、X, Y が連続型の場合、

$$P(a \leqq X \leqq b, c \leqq Y \leqq d) = \int_a^b \int_c^d p(x, y)\, dy \cdot dx$$ と表される。

この $p(x,y)$ を X と Y の同時確率密度関数という.

$p(x,y)$ は.

- $p(x,y) \geqq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy \cdot dx = 1$ 　をみたす.

また.

$p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy$,　$p_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dx$ を.

それぞれ. X. Yの周辺確率密度関数という. このとき.

$\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)\,dx = 1$,　$\int_{-\infty}^{\infty} p_2(y)\,dy = 1$ 　をみたす.

例. サイコロとコインを同時に投げる.

Xをサイコロの目, Yを表(1), 裏(0)　とするとき, 同時確率は

$p_{ij} = \frac{1}{12}$ 　である. さらに. 周辺確率は.

$p_{i\cdot} = \frac{1}{6}$,　$p_{\cdot j} = \frac{1}{2}$ 　となる

問題. サイコロAとBの2個を同時に投げ.

XをサイコロAの目, YをサイコロBの目とするとき.

同時確率と周辺確率を求めよ.

答　$p_{ij} = \frac{1}{36}$.

$p_{i\cdot} = \frac{1}{6}$,　$p_{\cdot j} = \frac{1}{6}$ 　である.