# 期待値と分散.

## 期待値.

期待値は.何回もくり返したときに期待される平均値のこと.式で表すと次になる.

定義 1.5.1. 確率変数 X について.

離散変数のとき $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

連続変数のとき、 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, dx$

によって定義される $E(X)$ を $X$ の期待値 という.

例. (1). トランプを1枚引いたとき、出る数字 (1〜13) を X とおくと.期待値は.

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{13}+2\cdot\frac{1}{13}+3\cdot\frac{1}{13}+\cdots+13\cdot\frac{1}{13}$$

$$=\frac{1}{13}\cdot(1+2+\cdots+13)=\frac{1}{13}\cdot\frac{13\cdot 14}{2}=7$$ である.

(2) $p(x)=\begin{cases} 6x(1-x) & 0\leqq x\leqq 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$ で与えられているとき、期待値は.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot p(x)\, dx=\int_0^1 6x^2-6x^3\, dx=\left[2x^3-\frac{3}{2}x^4\right]_0^1$$

$$=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$ である.

問題. (1). サイコロをふって.出た目を X とするとき、期待値を求めよ.

(2) $p(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a} & a\leqq x\leqq b. \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$ $(b>a)$ とするとき、期待値を求めよ

答. (1). $\frac{7}{2}$

(2) $\frac{a+b}{2}$.

$X$を $x_i$ または $x$ という値をとる確率変数とする.

関数 $f$ によって.

$y_i = f(x_i)$ , $y = f(x)$ となるとき.

この $y_i$ や $y$ をとる確率変数 $Y$ を考えることができる.

これを. $Y = f(X)$ と書く.

この $Y$ の期待値は.

離散 : $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) p_i$.

連続 : $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x) dx$ になる.

<u>定理1.5.2.</u> $X$を確率変数、$a$を定数とすると

(i) $E(X+a) = E(X) + a$

(ii) $E(aX) = a \cdot E(X)$ となる

∵ $X$が離散変数のときだけ考える.

(1). $E(X+a) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + a) p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \sum_{i=1}^{n} a p_i = E(X) + a$

(2) $E(aX) = \sum_{i=1}^{n} a x_i p_i = a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = a \cdot E(X)$.

連続型も同様に示せる.

また、この定理から

$E(aX+b) = aE(X) + b$

$E(X - E(X)) = 0$ がわかる.