※前回のノートの残りを先にやります

連続型確率変数と確率密度関数

例えば、缶ビールの内容量とか、ダーツのあたる場所などは、

連続的な数値をとる。このような量を連続型の確率変数という。

連続型の確率変数は、とりうる値が無限個あるので、ちょうどある1つの値をとる確率は、

$P(X=x)=0$ となってしまう。なので、このかわりに、

$P(x \leqq X \leqq x+\underbrace{\Delta x}_{\text{でちょっとの幅}})$ を考えてみる。

この Δx がすごく小さいときは、その近辺での確率が一定であると考えて、

$P(x \leqq X \leqq x+\Delta x)=p(x)\cdot\Delta x$ と考える。

ここで $p(x)$ は、x が起こる確率ではなく"点 x の近くの単位長さ当りの出現確率"である。

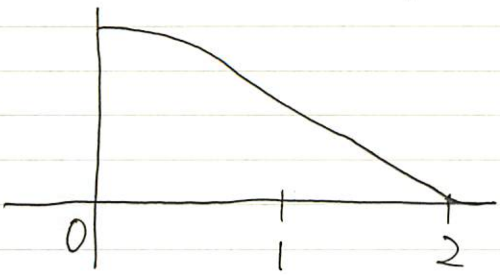
この $p(x)$ を確率密度関数という。これを用いると、

X のとる値が任意の区間 $[a, b]$ に入る確率は、

$P(a \leqq X \leqq b)=\int_a^b p(x)\,dx$ で与えられる。

例. ダーツをある点Pに向かってなげたとき、ささった点と点Pの距離を X とするとき、

確率密度関数 $p(x)$ は例えば次のようなグラフになる。



ここで、ダーツが点Pから距離1以下の点にあたる確率は、積分を使って、

$\int_0^1 p(x)\,dx$ で与えられる。

$p(x)$ を確率と考えてはいけない.

積分することで確率を与える関数と思うと理解しやすい.

$p(x)$ は、次の条件を満たさないといけない.

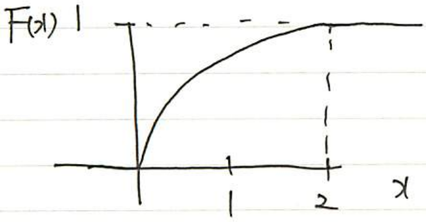
$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1.$$

また、連続型確率変数の場合、分布関数 $F(x)$ は、

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt$$ で与えられる.

x 以下の値をとる確率になる.

さきほどの例であれば、分布関数は



のような関数になる.

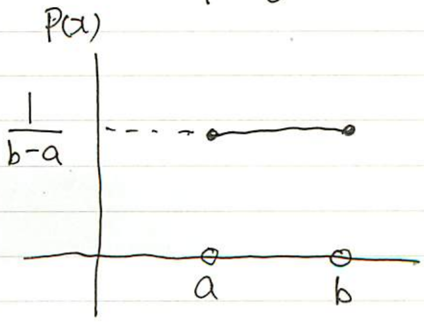
ちなみに、次の関係も成り立つ.

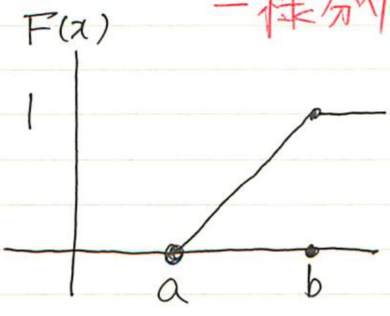
- $P(a \leqq X \leqq b) = F(b) - F(a)$
- $p(x) = \dfrac{d}{dx} F(x)$

<u>例</u>. 確率密度関数 $p(x)$ が

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leqq x \leqq b \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられる分布を区間 $[a, b]$ における一様分布という.





例.

$$p(x)=\begin{cases} ax(1-x) & 0\leqq x\leqq 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$ とするとき.

(1). aの値を求めよ.

(2) $P(\frac{1}{4}\leqq X<\frac{1}{2})$ を求めよ

(3) $F(x)$ を求めよ.

答 (1). $\int_0^1 ax(1-x)\,dx=1$ より.

$1=a\cdot\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{a}{6}$ $\therefore a=6$.

(2) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 6x(1-x)\,dx=\left[3x^2-2x^3\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}-\frac{3}{16}+\frac{1}{32}=\frac{11}{32}$ である

(3) $x\leqq 0 \Rightarrow F(x)=0$, $x\geqq 1 \Rightarrow F(x)=1$.

$0\leqq x\leqq 1$ であれば.

$F(x)=\int_0^x 6t(1-t)\,dt=\left[3t^2-2t^3\right]_0^x=3x^2-2x^3$ である.

問題 ① $$P(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{3} & 0\leqq x<1 \\ c & 1\leqq x<5 \\ 0 & 5\leqq x \end{cases}$$ で与えられているとき.

(1). cを求めよ

(2). $P(\frac{1}{2}\leqq X<4)$ を求めよ.

(3). $F(x)$ を求めよ.

②. 0から1までの任意の実数を取り出し、その小数第1位で四捨五入したときの誤差を X とする.

(1). Xの確率密度関数を求めよ.

(2) 誤差が 0以上0.1以下になる確率を求めよ.

答 ①(1) $1 = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{3}\,dx + \int_1^5 c\,dx = \frac{1}{3} + 4c$ より

$c = \frac{1}{6}$ である

(2) $P(\frac{1}{2} \leqq X < 4) = \int_{\frac{1}{2}}^{4} p(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{3}\,dx + \int_1^4 \frac{1}{6}\,dx$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ である

(3). $x \leqq 0 \Rightarrow F(x) = 0$, $x \geqq 5 \Rightarrow F(x) = 1$.

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき.

$F(x) = \int_0^x \frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{3}x$.

$1 \leqq x \leqq 5$ のとき.

$F(x) = \frac{1}{3} + \int_1^x \frac{1}{6}\,dt = \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(x+1)$ である.

② 誤差は 0から0.5の間で. その確率密度は等しくなるので.

(1) $p(x) = \begin{cases} 2 & 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$.

(2). $\int_0^{0.1} 2\,dx = 0.2$. である.