先週の問題の解説

問　トランプからXさんとYさんが1枚ずつひく．

事象A：Xさんがハートをひく．　事象C：Yさんがスペードをひく

事象B：Xさんが K をひく　事象D：Yさんが J をひく．

この中で独立な事象の組を全て挙げよ．

答．AとB，AとD．BとC，CとD．　であったが，最初の2つを解説する

まず　$P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$　であり

$P(B|A) = \frac{1}{13}$　より独立であることがわかる．

次に．$P(D) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$　である．

$P(D|A)$ を考えると．

Aさんがひいたのが J である $\frac{1}{13}$ ― Yさんが J をひく $\frac{3}{51}$

Aさんがひいたのが J 以外 $\frac{12}{13}$ ― Yさんが J をひく $\frac{4}{51}$

$\therefore P(D|A) = \frac{1}{13}\cdot\frac{3}{51} + \frac{12}{13}\cdot\frac{4}{51} = \frac{1}{13}$　となり独立である．

問題．(1)．コイントスを5回行うとき、すべて表である確率を求めよ．

(2)．両面が赤のカード，両面が白のカード，片面が赤で片面が白のカードの3枚のカードが袋に入っている．この袋から1枚とり出し，みえている面が赤であるとき、その裏面が白である確率を求めよ．

答．(1) $\frac{1}{32}$

(2) $\frac{1}{3}$

ベイズの定理

事象A、B に対し、$B=(A\cap B)\cup(A^c\cap B)$ とできるので、

定理1.2.1 と排反の条件を使うと、

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)$$
$$=P(A)P(B|A)+P(A^c)P(B|A^c)$$ とできる。

これを一般化すると次の定理を得る。

定理1.2.3.

事象 A_i $(i=1,2,\cdots,n)$ が互いに排反で

$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$ であるとき、

任意の事象 B に対し、

$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n)$ とできる。

$\because$ $B=(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)\cup\cdots\cup(A_n\cap B)$ より

$$P(B)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+\cdots+P(A_n\cap B)$$
$$=P(A_1)P(B|A_1)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n)$$ となる。

条件付き確率は、Aが原因、Bが結果と考えれば、

原因と結果の因果関係の強さを表しているともいえる。

定理1.2.4 (ベイズの定理). 事象Bを引き起こす原因として事象 $A_1,\cdots,A_n$ が

考えられ、これらは排反とする。このとき、Bが起こった原因が A_k であった確率 $P(A_k|B)$ は

$$P(A_k|B)=\frac{P(A_k)P(B|A_k)}{P(A_1)P(B|A_1)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n)}$$ である。

$P(A_k \cap B) = P(B \cap A_k)$ より

$P(B) \cdot P(A_k | B) = P(A_k) P(B | A_k)$ とできる.

両辺を $P(B)$ で割り. 定理1.2.3 を使えばよい.

例. X.Y.Z 3人がクッキーを持ち寄った. 割合はそれぞれ 35, 40, 25% であった.

そのうち 8, 5, 3% が割れていた. さて. その中の1つをとりだしたとき, それが

割れたクッキーであったとき, これを X が作った確率はいくらか.

答 A_1, A_2, A_3 を. X, Y, Z が作ったものであるという事象とする

E : 割れクッキーをとる という事象とすると.

$$P(A_1 | E) = \frac{0.35 \times 0.08}{0.35 \times 0.08 + 0.4 \times 0.05 + 0.25 \times 0.03} = \frac{280}{555} = \frac{56}{111}$$ である.

問題. ある製品を. X, Y, Z 3社から. それぞれ. 40, 30, 30% の割合で

納入させていたが, 不良率はそれぞれ 2. 4. 5 % であった.

いま製品の1つを取り出したとき, 不良品であったとすると.

それが X 社の製品である確率を求めよ.

答. A_1, A_2, A_3 を それぞれ それが X, Y, Z が作ったものであるという事象.

B : 不良品を取る事象 とすると.

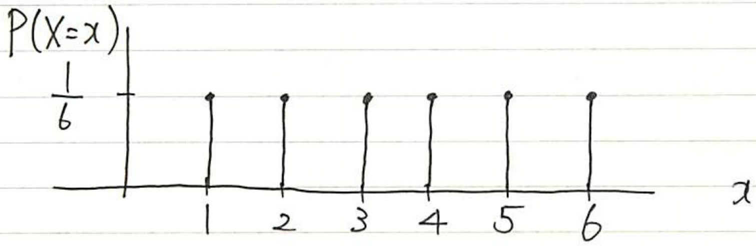
$$P(A_1 | B) = \frac{0.4 \times 0.02}{0.4 \times 0.02 + 0.3 \times 0.04 + 0.3 \times 0.05} = \frac{8}{35}$$ である

離散型確率変数と確率分布

サイコロなげで、出る目の数をXとする。

Xのとりうる値と、その確率を表・グラフにすると、次のようになる。

X	1	2	3	4	5	6
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



このように、事象を変数に対応させることにするとき、

この変数を確率変数という。

特にこの例のように、変数が飛びとびの値をとるとき、

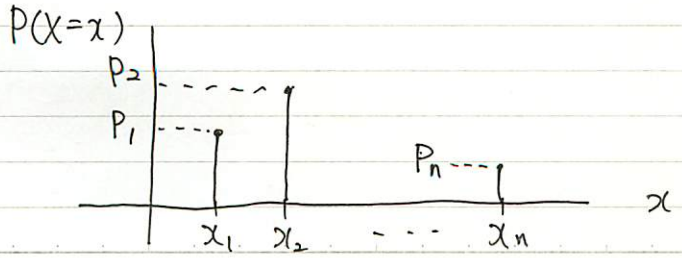
離散型の確率変数という。

一般に確率変数Xがとり得る値、x_i $(i=1,2,\cdots,n)$ と、

それが出現する確率　$p_i = P(X=x_i)$ との対応関係を

確率分布という

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	
確率	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	→ 足すと1.



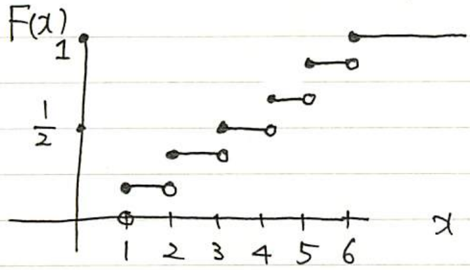
のように表せる

Xの確率分布 $P(X=x_i)=p_i$ に対して.

$$F(x)=P(X\leqq x)=\sum_{x_i\leqq x}p_i$$ ← Xがx以下である確率

で定義される関数を. X の分布関数 という.

サイコロなげの例の分布関数をかくと.



というグラフになる.

例えば、 $x=2.5$ なら. $F(x)$ は サイコロの値が 2.5以下になる確率だから.

$$F(2.5)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$ となる.

$F(x)$ は必ず非減少関数になり.

$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$ をみたす.

また.分布関数から.確率分布を求めることができる.

$$\begin{cases} p_1=F(x_1) \\ p_{i+1}=F(x_{i+1})-F(x_i) \end{cases}$$ $(i=1,\cdots,n-1,\ x_{i+1}>x_i)$

問題. [1] コインの表に1,裏に0の数字を書いて投げる。.

その結果をXとしてXの確率分布と分布関数をグラフに書け.

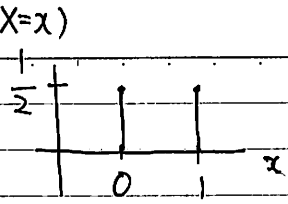
[2] Xの確率分布が次で与えられているとき.

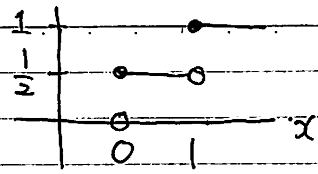
X	−1	0	1
確率	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	P

(1) Pを求めよ (2) $P(X^2=1)$ を求めよ (3) 分布関数 $F(x)$ をグラフに書け

答 11

X	0	1
確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

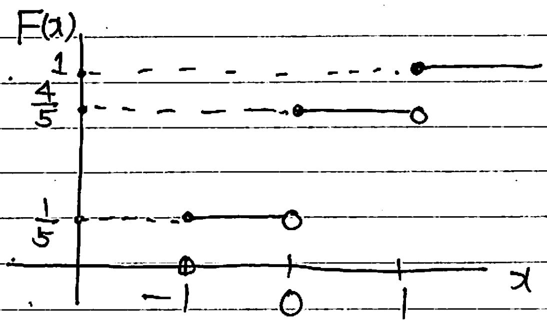




12 (1) $p = \frac{1}{5}$

(2) $P(X^2 = 1) = P(X = 1) + P(X = -1) = \frac{2}{5}$.

(3)



である.