統計的仮説検定

未知母数を具体的な数値などと比較して差異があるか判定したい.

例. 250g入りの缶詰10本の内容量を調べたら平均値は248.2gであった.

メーカーの主張は平均250g, 標準偏差3.2gの正規分布である.

この表示は正当であるといえるか.

(1) [メーカーの主張] 平均値 $\mu = 250$

(2) [消費者の主張] 平均値 $\mu < 250$

(3). とりあえず、メーカーの主張を認めて内容量は $N(250, (3.2)^2)$ に従うとしてみる. すると大きさ10の標本平均 $\overline{X}$ は $N(250, \frac{(3.2)^2}{10})$ に従う.

ここで $Z = \dfrac{\overline{X} - 250}{\frac{3.2}{\sqrt{10}}}$ とおけば. Z は $N(0, 1)$ に従う.

(4). 1より小さい値. 例えば 0.05 をとり.

$P(\overline{X} < \xi) = 0.05$ となる ξ を求めてみると.

$$P\left(Z < \frac{\xi - 250}{\frac{3.2}{\sqrt{10}}}\right) = 0.05$$

$$P\left(\frac{\xi - 250}{\frac{3.2}{\sqrt{10}}} < Z < 0\right) = 0.05$$

$$P\left(0 < Z < \frac{-\xi + 250}{\frac{3.2}{\sqrt{10}}}\right) = 0.05$$

とできる. これより

$$\frac{-\xi + 250}{\frac{3.2}{\sqrt{10}}} = 1.6449$$

となり $\xi \fallingdotseq 248.3$ になる.

(5) つまり $\overline{X} = 248.2$ は確率的におこりにくい (5%) $\overline{X} < 248.3$ に入っている.

(6) 消費者の主張の方が正当に思える.

問題 (4) で 0.05の値を 0.01 としたら結果はどうなるか.

答. $P(\overline{X} < \xi) = 0.01$ となる ξ を求めると.

$$\frac{-\xi + 250}{\frac{3.2}{\sqrt{10}}} = 2.3263$$ より $\xi \fallingdotseq 247.6$ になる.

$\therefore$ $\overline{X} = 248.2 > \xi = 247.6$ であるので.

メーカーの主張の方が正当に思える.

母数の検定の一般形式.

未知の母数 θ と具体的な数 θ_0 の大小関係を考えたときに、主張されることがらを.

統計的仮説 という. 具体的には.

(a) $\theta > \theta_0$ (b) $\theta < \theta_0$ (c) $\theta \neq \theta_0$ (d) $\theta = \theta_0$

の4つで表現される.

統計的仮説の真偽を標本の結果に基づいて判定することを.

統計的仮説検定 あるいは 検定 という.

検定の仕方 :

(1) とりあえず主張 (d) $\theta = \theta_0$ を認める.

これを 帰無仮説 とよび H_0 で表す.

(さっきの例なら, $H_0 : \theta = 250$)

(2) これに対し. (1)と対立する仮説を (a)〜(c) の中から1つ選ぶ.

これを 対立仮説 とよび H_1 で表す.

(さっきの例なら $H_1 : \theta < 250$)

(3). θを予想できる統計量Ⓗを決める.

これを検定統計量という.

(さっきの例なら標本平均$\bar{X}$, あるいはZ)

(4) 小さな正の値αを決める. αは 0.1, 0.05, 0.01 などが一般的.

このαを有意水準または危険率という.

このαをもとに. H_1の設定に応じて. 例えば (b) $\theta < \theta_0$の場合なら

$$P(Ⓗ < \theta(\alpha)) = \alpha$$

をみたす領域を調べる($\theta(\alpha)$を求める). この領域 Ⓗ$<\theta(\alpha)$を.

対立仮説H_1に対する有意水準αの棄却域という.

(さっきの例なら $\alpha = 0.05$, $\theta(\alpha) = 248.3$)

(5) Ⓗの実現値を計算する.

(さっきの例なら. Ⓗ$= 248.2$)

(6) Ⓗが棄却域にあるとき, 帰無仮説H_0は棄却され, 対立仮説H_1が採択される.

また. $100\cdot\alpha$%有意水準では Ⓗとθ_0に有意差がある

(Ⓗはθ_0より有意に小さい) という.

逆に棄却域にⒽがないとき, 帰無仮説は棄却されず採択される.

このとき Ⓗとθ_0には有意差はない. という.

とくに. (a),(b)を右側;左側検定, (c)を両側検定という.

母平均の検定.

例1. 直径5mmのナットを生産するために試作した100個の標本を調べたら.

平均4.998mm, 標準偏差 0.009mm であった.

この製作方法で直径が規格値より小さくなるか.

有意水準5%で検定せよ.

答. (1) 帰無仮説 H_0: 母平均 $\mu = 5\text{mm}$

(2) 対立仮説 H_1: $\mu < 5\text{mm}$

(3). $\bar{X}$を標本平均とすると. $\bar{X}$は $N\left(\mu, \frac{(0.009)^2}{100}\right)$ に従うとしてよいので.

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{0.009}{\sqrt{100}}} = \frac{\bar{X}-\mu}{0.0009}$$ とおけば Z は $N(0,1)$ に従う.

このZを検定統計量とする.

(4) $P(Z < \theta(0.05)) = 0.05$ より.

$\theta(0.05) = -1.6449$ となり. 棄却域は

$Z < -1.6449$ である.

(5) $$Z = \frac{4.998-5}{0.0009} = \frac{-0.002}{0.0009} \fallingdotseq -2.22$$

(6) Zの実現値は棄却域に入るので.

H_0は有意水準5%で棄却される.

⟶ つまり製造の条件をかえた方がよい.

問題　さきほどの例で．1万個の標本を調べたら．

平均 4.9995，標準偏差 0.01 mm であった．

有意水準 1% で検定せよ．

答　(1) 帰無仮説 H_0：~~母平均~~　$\mu = 5\,mm$

(2) 対立仮説 H_1：　$\mu < 5\,mm$

(3). $\bar{X}$を標本平均とすると．$\bar{X}$は $N\left(\mu, \frac{(0.01)^2}{10000}\right)$ としてよいので

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{0.01}{\sqrt{10000}}} = 10^4 \cdot (\bar{X} - \mu)$$　とおけば Z は $N(0,1)$ に従う．

この Z を検定統計量とする．

(4) $P(Z < \theta(0.01)) = 0.01$　より

$\theta(0.01) = -2.3263$　となり．棄却域は

$Z < -2.3263$．である

(5) $Z = 10^4 (4.9995 - 5) = -5$

(6) Z の実現値は棄却域に入るので．

H_0は有意水準 1% で棄却される．