

母集団比率の区間推定.

母集団において、ある条件  $C$  をみたす比率を  $p$  とする.

また、大きさ  $n$  の標本の  $C$  をみたす比率を  $\bar{X}$  とする.

$X$  を、 $C$  をみたす標本の数とすると、 $X$  は二項分布  $B(n, p)$  に従う.

ここで、定理 1.9.2 より、 $n$  が十分大きく、 $np \geq 5$  であれば、

$X$  は、ほぼ正規分布  $N(np, np(1-p))$  に従う.

今、いいたいのは比率なので、 $\bar{X} = \frac{1}{n} X$  を考えたい。するとこれは

$N(p, \frac{p(1-p)}{n})$  に従う。(定理 1.8.3 or 1.8.4)

例. 信大生 100 人が W 杯初戦をテレビで見たか調査したところ、

37 人が見ていたことがわかった。この中継の視聴率  $p$  の 95% 信頼区間を求めよ

答.  $np = 100 \times 0.37 = 37 > 5$  より

視聴率  $\bar{X}$  はほぼ  $N(p, \frac{p(1-p)}{n})$  に従うとしてよい

$\therefore P(\bar{X} - \delta \leq p \leq \bar{X} + \delta) = 0.95$  となる  $\delta$  を求めればよい.

計算すると  $P(p - \delta \leq \bar{X} \leq p + \delta) = 0.95$

ここで  $Z = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$  とおくと、 $Z$  は  $N(0, 1)$  に従う.

$\therefore P\left(\frac{-\delta}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq Z \leq \frac{\delta}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) = 0.95$

$P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \cdot \delta\right) = 0.475$ .

これより  $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \cdot \delta = 1.96$  となる

ここで  $p = 0.37$  を代入し計算すると.

$$\delta = \frac{\sqrt{0.37 \cdot (1-0.37)}}{\sqrt{100}} \cdot 1.96 \doteq 0.095 \quad \text{となる.}$$

$\therefore 0.275 < p < 0.465$  である.

問題 さきほどの例で、1万人中 3600人が見えたとき.

$p$  の 99% 信頼区間を求めよ

答  $np = 10000 \cdot 0.36 = 3600 > 5$  より.

視聴率  $\bar{X}$  はほぼ  $N(p, \frac{p(1-p)}{n})$  に従うとしてよい.

$\therefore P(\bar{X} - \delta \leq p \leq \bar{X} + \delta) = 0.99$  となる  $\delta$  を求めればよい.

$$P(p - \delta \leq \bar{X} \leq p + \delta) = 0.99.$$

ここで  $Z = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$  とおくと、 $Z$  は  $N(0, 1)$  に従い.

$$P\left(-\frac{\delta}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq Z \leq \frac{\delta}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) = 0.99.$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \delta\right) = 0.495.$$

$$\therefore \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \cdot \delta = 2.5758$$

ここで  $p = 0.36$ 、 $n = 10000$  を代入し計算すると.

$$\delta = 2.5758 \cdot 0.6 \cdot 0.8 \cdot \frac{1}{100} \doteq 0.012 \quad \text{となる}$$

$\therefore 0.348 < p < 0.372$  である