確率・統計

確率とは

注目する事象(ことがら)が実現すると期待される割合のこと。

→ より数学的に表すための準備を以下でする。

事象について

全事象 Ω : 実現可能なすべてを集めた事象

空事象 ϕ : 実現しえない事象

和事象 $A \cup B$: 事象A、Bの少なくとも一方が起る事象

積事象 $A \cap B$: 事象AおよびBの両方が起る事象

余事象 A^c : Aが起こらない事象

例. サイコロ投げを考えると、全事象Ωは、

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ とできる。

事象A、B、C、をそれぞれ

$A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, $C = \{1, 2\}$ とすれば、

$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{5\}$,

$A^c = \{2, 4, 6\}$, $B \cap C = \phi$ となる。→ 図を参照

問題. 上の例で、$A \cup C$, $A \cap C$, B^c, $B^c \cap C^c$ をそれぞれ求めよ

答. $A \cup C = \{1, 2, 3, 5\}$, $A \cap C = \{1\}$

$B^c = \{1, 2, 3\}$, $B^c \cap C^c = \phi$ である。

例. 任意の事象 A に対し.

$A \cup A^c = \Omega$, $A \cap A^c = \phi$ である.

2つの事象の一方が起きれば、他方が起こらないとき,

それらの事象は互いに排反であるという.

定理1.1.1.

事象 A, B が互いに排反であれば,

$A \cap B = \phi$ である. この逆も成り立つ.

例. サイコロ投げの例で, B と C は排反である.

確率の基本的性質.

事象 A に対し. $P(A)$ で A が起こる確率を表すとする.

I. 任意の事象 A に対し. $0 \leqq P(A) \leqq 1$.

II. $P(\Omega) = 1$, $P(\phi) = 0$

III. 事象 A, B が互いに排反であるとき,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

確率の加法定理: 任意の事象 A, B に対し.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$\because$ $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$ と

$P(A \cap B^c) + P(B) = P(A \cup B)$ からわかる. → 図で説明

問題．52枚のトランプから1枚を引くとき，

事象A：スペードをひく，事象B：絵札（10, J, Q, K, A）をひく．

とするとき，以下の確率を求めよ．

(1)．$P(A)$，(2) $P(B)$，(3) $P(A \cap B)$，(4) $P(A \cup B)$

答．(1) $\frac{1}{4}$，(2) $\frac{5}{13}$　(3) $\frac{5}{52}$　(4) $\frac{28}{52} = \frac{7}{13}$

事象の独立性．

2つの事象の出方が互いに影響を与えあわないとき，

それらは互いに独立であるという．

A, B 2つの事象があって．仮にAが起ったとしたときに．

Bが起る確率を $P(B|A)$ と書き、条件AのもとでBが起る

条件付き確率という．また．AとBが互いに独立 $\Leftrightarrow P(B) = P(B|A)$ である

例．3本のあたりくじが入った10本のくじから1本をひく．

先に．Xさんが引き、次にYさんが引くとき．

事象A：Xさんがあたりをひく，事象B：Yさんがあたりをひく．とする

(1)．Xさんが引いたくじを戻すとき，AとBは互いに独立である．

(2) Xさんが引いたくじを戻さないとき，AとBは互いに独立ではない．

(3) (2)の場合．$P(B|A) = \frac{2}{9}$ である．

問題 (1) 白玉5個 赤玉10個入った壺から、Xさんと Yさんが順に1個ずつ取る.

事象A：Xさんが白玉をとる. 事象B：Yさんが白玉をとる とするとき.

$P(B|A)$, $P(B|A^c)$, $P(B^c|A)$, $P(B^c|A^c)$ を求めよ.

(2) トランプから Xさんと Yさんが1枚ずつ引く.

事象 A_1：Xさんがハートをひく　事象 B_1：Yさんがスペードをひく

事象 A_2：Xさんが K をひく　事象 B_2：Yさんが J をひく.

この中で互いに独立な事象の組を全て挙げよ.

答 (1) $P(B|A) = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$　$P(B|A^c) = \frac{5}{14}$

$P(B^c|A) = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$　$P(B^c|A^c) = \frac{9}{14}$

(2) A_1 と A_2, A_1 と B_2, A_2 と B_1, B_1 と B_2

一般に次の定理が成り立つ.

定理 1.2.1. 乗法定理：$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

定理 1.2.2. AとBが互いに独立なら. $P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B)$.

問題 (1) コイントスを5回行うとき、すべて表である確率を求めよ.

(2) 両面が赤のカード、両面が白のカード、片面が赤でもう片面が白のカードの3枚のカードが袋に入っている.

この袋から1枚とり取し、みえている面が赤であるとき、その裏面が白である確率を求めよ.

答. (1). $\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$　(2) $\frac{1}{3}$. (全ての面に番号をつけるとわかりやすい)

ベイズの定理

事象A、B に対し、 $B = (A \cap B) \cup (A^C \cap B)$ とできるので、

定理1.2.1 と 排反の条件を使うと、

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B)$$

$$= P(A)P(B|A) + P(A^C)P(B|A^C)$$ とできる。

これを一般化すると次の定理を得る。

定理1.2.3.

事象 A_i $(i=1,2,\cdots,n)$ が互いに排反で

$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$ であるとき、

任意の事象 B に対し、

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)$$ とできる。

$\because$ $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$ より

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

$$= P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)$$ となる。

条件付き確率は、Aが原因、Bが結果と考えれば、

原因と結果の因果関係の強さを表しているともいえる。

定理1.2.4 (ベイズの定理)。 事象Bを引き起こす原因として事象 $A_1, \cdots, A_n$ が考えられ、これらは排反とする。このとき、Bが起こった原因が A_k であった確率 $P(A_k|B)$ は

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)}$$ である。

☺ $P(A_k \cap B) = P(B \cap A_k)$ より

$P(B) \cdot P(A_k | B) = P(A_k) P(B | A_k)$ とできる.

両辺を $P(B)$ で割り. 定理1.2.3 を使えばよい.

例. X.Y.Z 3人がクッキーを持ち寄った. 割合はそれぞれ 35, 40, 25% であった.

そのうち 8, 5, 3% が割れていた. さて. その中の1つをとりだしたとき, それが

割れたクッキーであったとき, これを X が作った確率はいくらか.

答 A_1, A_2, A_3 を. X, Y, Z が作ったものであるという事象とする

E: 割れクッキーをとる という事象とすると.

$$P(A_1 | E) = \frac{0.35 \times 0.08}{0.35 \times 0.08 + 0.4 \times 0.05 + 0.25 \times 0.03} = \frac{280}{555} = \frac{56}{111}$$ である.

問題. ある製品を. X, Y, Z 3社から. それぞれ. 40, 30, 30% の割合で

納入させていたが, 不良率はそれぞれ 2, 4, 5% であった.

いま製品の1つを取り出したとき, 不良品であったとすると.

それが X 社の製品である確率を求めよ.

答. A_1, A_2, A_3 をそれぞれそれが X, Y, Z が作ったものであるという事象.

B: 不良品を取る事象 とすると.

$$P(A_1 | B) = \frac{0.4 \times 0.02}{0.4 \times 0.02 + 0.3 \times 0.04 + 0.3 \times 0.05} = \frac{8}{35}$$ である