例. (1). $\mathbb{C}^n$ の内積から導入される norm は $x\in(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{C}^n$ に対し.

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n}\overline{x_i}\cdot x_i\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$ である

(2) ℓ^2 の内積から導入される norm は $a=\{a_n\}\in\ell^2$ に対し.

$$\|a\| = \langle a, a\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\overline{a_n}a_n\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$ である.

問題. $C[a,b]$ の内積から導入される norm はなにか.

グラム・シュミットの直交化法.

以下. $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ は内積空間とする.

定義3.7. $x, y\in V$ が、

$\langle x, y\rangle = 0$ をみたすとき、x と y は直交するという.

$\|x\| = 1$ をみたすベクトルを単位ベクトルという.

$\tilde{x} = \frac{1}{\|x\|}\cdot x$ ととると. $\|\tilde{x}\| = 1$ となる

この $\tilde{x}$ を作ることを x の規格化という.

定義3.8. $D=\{x_1,\cdots,x_n,\cdots\}$ が

$$\langle x_m, x_n\rangle = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m=n \\ 0 & m\neq n \end{cases}$$ をみたすとき.

この D を正規直交系 (orthonormal system, ONS) という.

例. $\mathbb{C}^n$ の標準基底 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ は ONS である.

一次独立な n 個のベクトル $\{x_1, \cdots, x_n\}$ が与えられたとき.

以下のやり方で ONS を作ることができる.

① $z_1 = \tilde{x}_1 = \frac{1}{\|x_1\|} \cdot x_1$ とする.

② $y_2 = x_2 - \langle z_1, x_2 \rangle z_1$,

$z_2 = \tilde{y}_2 = \frac{1}{\|y_2\|} y_2$ とする.

すると. $\langle z_1, z_2 \rangle = \frac{1}{\|y_2\|} \langle z_1, x_2 - \langle z_1, x_2 \rangle z_1 \rangle$

$= \frac{1}{\|y_2\|} \left(\langle z_1, x_2 \rangle - \langle z_1, x_2 \rangle \cdot \langle z_1, z_1 \rangle \right) = 0$ となる.

③ $y_3 = x_3 - \langle z_1, x_3 \rangle z_1 - \langle z_2, x_3 \rangle z_2$

$z_3 = \tilde{y}_3 = \frac{1}{\|y_3\|} y_3$ とする すると.

$\langle z_1, z_3 \rangle = \frac{1}{\|y_3\|} \langle z_1, x_3 - \langle z_1, x_3 \rangle z_1 - \langle z_2, x_3 \rangle z_2 \rangle$

$= \frac{1}{\|y_3\|} \left(\langle z_1, x_3 \rangle - \langle z_1, x_3 \rangle \langle z_1, z_1 \rangle - \langle z_2, x_3 \rangle \langle z_1, z_2 \rangle \right)$

$= 0$ となる.

④ 以下同様に、

$y_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle z_i, x_n \rangle z_i$

$z_n = \tilde{y}_n$ とすればよい. すると.

$\langle z_1, z_n \rangle = \frac{1}{\|y_n\|} \langle z_1, x_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle z_i, x_n \rangle z_i \rangle$

$= \frac{1}{\|y_n\|} \left(\langle z_1, x_n \rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \langle z_i, x_n \rangle \langle z_1, z_i \rangle \right) = 0$ となる

この方法をグラムシュミットの直交化法という

問題. $x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ から ONS を作れ.