コーシー列と完備性

(X, d)を距離空間とする

定義 2.3

Xの点列$\{a_n\}$が次を満たすとき、$\{a_n\}$はコーシー列であるという。

(条件) ${}^\forall\varepsilon>0$ に対し ${}^\exists n_0\in\mathbb{N}$ s.t.

$$m, n \geqq n_0 \Rightarrow d(a_n, a_m) < \varepsilon$$

コーシー列は、nが大きくなると近付いていく数列、あるいは収束しそうな数列と考えると理解しやすい。

しかし、コーシー列が収束しない例も存在する。

例. 有理数全体に普通の距離をいれた$(\mathbb{Q}, d)$を考える。

$a_n\in\mathbb{Q}$を、$\sqrt{2}$の小数点第n位までの数とする。すなわち、

$a_1=1.4$, $a_2=1.41$, $a_3=1.414$, $\cdots$ である。

すると、$\{a_n\}$はコーシー列になる しかし、$\{a_n\}$は収束しない。

なぜなら、$\mathbb{R}$で考えれば、$a_n\longrightarrow\sqrt{2}$ であるが、$\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ だからである。

コーシー列になる証明

${}^\forall\varepsilon>0$ に対し ${}^\exists n_0\in\mathbb{N}$. s.t $\varepsilon>\frac{1}{10^{n_0}}$ とできる。

このn_0に対し、$m, n\geqq n_0$とすると、小数第n_0位までは同じなので、

$d(a_n, a_m)=|a_n-a_m|\leqq\frac{1}{10^{n_0}}<\varepsilon$ とできる。

$\therefore$ $\{a_n\}$はコーシー列である。

定義2.4.

コーシー列が全て収束するとき、距離空間 (X, d) を完備(complete)という.

意味としては、完備 → ギッチリ詰まっている. 完備でない → スカスカ. という風にもとらえられる.

例 (1). 先ほどの例でみたように. $(\mathbb{Q}, d)$ は完備でない.

(2). $(\mathbb{R}, d)$ は完備である.

(3) $(\mathbb{C}, d)$ も完備である.

(4). $(\mathbb{R}^2, d_2)$ も完備である.

(4)の証明.

$a_n = (x_n, y_n)$ とおき、$\{a_n\}$ がコーシー列であるとする.

すると. $\{x_n\}, \{y_n\}$ を考えたときに.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $m, n \geq n_0 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon$ より.

$d(x_m, x_n) = |x_m - x_n| \leqq \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2} = d(a_m, a_n) < \varepsilon$ となり.

$\{x_n\}$ はコーシー列になる. 同様に $\{y_n\}$ もコーシー列.

$\mathbb{R}$ は完備なので、$x_n \to x$, $y_n \to y$ とできる.

今. $a = (x, y)$ とおき、 $a_n \to a$ を示す.

$\forall \varepsilon > 0$ に対し. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geqq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$, $|y_n - y| < \varepsilon$

$\therefore$ $d(a, a_n) = \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} < \sqrt{2\varepsilon^2} = \sqrt{2} \cdot \varepsilon$ となる.

$\therefore$ $a_n \to a$ である.

証明の中で、$d(a, a_n) < \sqrt{2}\varepsilon$ を示したが、これを示せば十分である。

なぜなら、最初に n_0 をとるときに、

ε ではなく、$\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ に対し n_0 をとれば、すなわち、

$\forall \varepsilon > 0$ に対し、$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geqq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$

とすれば、よいからである。

問題. metric sp. (X, d) を、

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$ で定義されているとすると、

(X, d) は complete であることを示せ。