命題1.6. W_1, W_2 が V の subsp. のとき.

$W_1 \cap W_2$ も subsp. である.

∵ $W_1 \ni 0$, $W_2 \ni 0$ より $W_1 \cap W_2 \neq \phi$ である.

今 $^\forall x, y \in W_1 \cap W_2$, $r \in \mathbb{C}$ に対し.

$x+y \in W_1$ かつ $x+y \in W_2$ である ∴ $x+y \in W_1 \cap W_2$

$rx \in W_1$ かつ $rx \in W_2$ である ∴ $rx \in W_1 \cap W_2$.

∴ $W_1 \cap W_2$ は V の subsp. である.

定義1.7. V の subsp. W_1, W_2 に対し.

$W_1 + W_2 = \{ w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 \}$ とすると.

これは V の subsp. になる. これを. W_1 と W_2 の 和 もしくは 和空間 という.

とくに $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ のとき. $W_1 + W_2$ は W_1 と W_2 の 直和 であるといい.

$W_1 \oplus W_2$ と書く.

問題. $W_1 + W_2$ が V の subsp. になることを示せ.

基底と次元.

定義1.8.

$v_1, \cdots, v_n \in V$ が次をみたすとき, $v_1, \cdots, v_n$ は 1次独立 であるという.

(条件). $r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_n v_n = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$.

1次独立でないとき, $v_1, \cdots, v_n$ は 1次従属 であるという.

例. (1) $\mathbb{C}^n$ の基本ベクトル $e_1, e_2, \cdots, e_n$ は1次独立である

(2). $M(m,n;\mathbb{C})$ において. (i,j) 成分が1でその他の成分が全て0である行列を e_{ij} で表し. matrix unit (行列単位) という.

$m \times n$ 個の行列単位の組は1次独立である.

(3). $v_1, \cdots, v_n \in V$ の中に零ベクトルが入っている場合, $v_1, \cdots, v_n$ は1次従属になる.

問題. 上の (1), (2), (3) を示せ.

定義1.9.

$V \ni v_1, \cdots, v_n$ が次の2つの条件をみたすとき, $\{v_1, \cdots, v_n\}$ を V の基底 (basis) という.

(1). $v_1, \cdots, v_n$ は1次独立.

(2) $\mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_n\} = V$.

例. (1) $\mathbb{C}^n$ の基本ベクトル $\{e_1, \cdots, e_n\}$ は $\mathbb{C}^n$ の基底である.

(2). $M(m,n;\mathbb{C})$ の matrix unit の組は $M(m,n;\mathbb{C})$ の基底である.

補題1.10. $V \ni a_1, \cdots, a_n$ がそれぞれ $b_1, \cdots, b_m \in V$ の1次結合で表されているとする. もし. $n > m$ ならば, $a_1, \cdots, a_n$ は1次従属.

∵ $a_1, \cdots, a_n$ が $b_1, \cdots, b_m$ の1次結合で次のように表されているとする。

$$a_1 = c_{11} b_1 + c_{21} b_2 + \cdots + c_{m1} b_m$$

$$a_2 = c_{12} b_1 + c_{22} b_2 + \cdots + c_{m2} b_m$$

$$\vdots$$

$$a_n = c_{1n} b_1 + c_{2n} b_2 + \cdots + c_{mn} b_m.$$

このとき、連立方程式

$$\begin{cases} c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + \cdots + c_{1n} x_n = 0 \\ c_{21} x_1 + c_{22} x_2 + \cdots + c_{2n} x_n = 0 \\ \vdots \\ c_{m1} x_1 + c_{m2} x_2 + \cdots + c_{mn} x_n = 0 \end{cases}$$

を考えると。

$n > m$ より。この方程式は自明でない解をもつ。

それを $d_1, \cdots, d_n$ とする。すると。このうちの1つは 0 ではない さらに

$$\begin{aligned} & d_1 a_1 + d_2 a_2 + \cdots + d_n a_n \\ = \ & \boxed{d_1 c_{11}} b_1 + \boxed{d_1 c_{21}} b_2 + \cdots + \boxed{d_1 c_{m1}} b_m \\ + \ & \boxed{d_2 c_{12}} b_1 + \boxed{d_2 c_{22}} b_2 + \cdots + \boxed{d_2 c_{m2}} b_m \\ & \vdots \\ + \ & \boxed{d_n c_{1n}} b_1 + \boxed{d_n c_{2n}} b_2 + \cdots + \boxed{d_n c_{mn}} b_m \\ & \quad \| \qquad\qquad \| \qquad\qquad\qquad \| \\ & \quad 0 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad\qquad 0 \end{aligned}$$

$= 0$ となるので。$a_1, \cdots, a_n$ は1次従属 //.

定理1.11.

$\{v_1,\cdots,v_n\}$, $\{u_1,\cdots,u_m\}$ を V の basis とするとき、$n=m$ である.

∵ $\{u_1,\cdots,u_m\}$ は basis より.

各 $v_1,\cdots,v_n$ は $u_1,\cdots,u_m$ の1次結合で表されている.

もし. $m>n$ とすると. 補題1.10から $v_1,\cdots,v_n$ は1次従属となり矛盾、

∴ $m\leqq n$ でないといけない. 同様に $m\geqq n$ がわかるので $m=n$.

定義1.12:

vector sp. が有限個のベクトルで生成されているとき, V は有限次元 (finite dimensional) であるという

有限次元でないときは無限次元 (infinite dimensional) という.

有限次元のときは. 基底の個数が一定なので. それを V の次元とよび

$\dim V$ で表す. とくに $\dim\{0\}=0$ と定めておく.

例. (1) $\mathbb{C}^n$ の次元は n である. すなわち $\dim\mathbb{C}^n=n$.

(2) $M(m,n;\mathbb{C})$ の次元は $m\cdot n$ である

すなわち $\dim M(m,n;\mathbb{C})=m\cdot n$

(3) 多項式全体 $P[x]$ は無限次元である.

定理 1.13 (証明略・線形代数の教科書を参照)

W, W_1, W_2 を V の subsp. とするとき.

(1) $\dim W \leqq \dim V$

(2) $\dim W = \dim V \Rightarrow W = V$

(3) $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

その他の vector sp. の例.

(1) $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ とし

$C[a,b] = \{ [a,b]$ 上の複素数値連続関数$\}$ とする.

$f, g \in C[a,b]$, $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し.

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ で

和とスカラー倍を定義すると. $C[a,b]$ は vector sp. になる.

とくに. $C[a,b]$ は無限次元である.

(2) $l = \{$複素数列全体$\}$

$= \{ a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \mid a_n \in \mathbb{C} \}$ とする

$a = (a_n), b = (b_n) \in l$, $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し.

$a + b = (a_n + b_n)$, $\lambda a = (\lambda a_n)$ で

和とスカラー倍を定義すると. l は vector sp. になる.

とくに. $C[a,b]$ は無限次元である.

Vが有限次元で，$\dim V = n$

$\Leftrightarrow$ Vに含まれる1次独立なベクトルの最大個数がn個

Vが無限次元．

$\Leftrightarrow$ $^\forall n \in \mathbb{N}$ に対し．Vに含まれる1次独立なn個のベクトルが存在する．

を使うと．上の2つが無限次元であることがわかる．

<u>$C[a,b]$が無限次元である証明</u>．

$p_n(x) = x^n \in C[a,b]$ $(n=0,1,2,\cdots)$ とすると．

$p_0, \cdots, p_n$ が1次独立であることを示す．

$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j p_j = 0$ とすると．n回微分することで．$\lambda_n = 0$ が出る．

次に．$n-1$回微分すると．$\lambda_{n-1} = 0$ が出る．

以下くり返せばよい．

<u>問題</u>．lが無限次元であることを示せ．

<u>成分表示</u>．

$\mathbb{C}^n$のベクトル

$\{u_1, \cdots, u_n\}$ をVの basis とするとき．

$$x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n = [u_1\ u_2 \cdots u_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ とかける．

この $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ をベクトルxの成分表示という．

$\longrightarrow$ basis を1つ固定すれば，$\mathbb{C}^n$ と同一視できる．