リースの表現定理.

$B(H,K)$ の特別な場合として. $K=\mathbb{C}$ の場合を考える.

$B(H,\mathbb{C})$ の元 f は 有界線形汎関数 といわれ.

$H^* = B(H,\mathbb{C})$ を H の 双対空間 (dual sp.) という.

例 $H=\mathbb{C}^n$ の場合を考える.

今. $f \in (\mathbb{C}^n)^*$ とし $\{e_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}^n$ を CONS とする.

$f_k := f(e_k)$ とおくと.

$\forall a = \sum_{k=1}^n a_k e_k \in \mathbb{C}^n$ に対し.

$f(a) = f(\sum_{k=1}^n a_k e_k) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot f(e_k) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot f_k$ となる.

$\longrightarrow$ ft.nal は CONS の行き先を決めればきまる.

つまり. f は $(f_1, \cdots, f_n) \in \mathbb{C}^n$ と対応していると考えられる.

これをより一般的にすると. 次の定理が得られる.

定理 5.4. $\forall f \in H^*$ に対し. $\exists x_f \in H$ s.t.

$f(y) = \langle x_f, y \rangle \quad \forall y \in H$ かつ $\|x_f\| = \|f\|$.

$\because$ まず. $\ker f = 0$ の場合を考える.

このとき $\forall y \in H$ に対し $f(y) = 0$ なので

$x_f = 0$ としてやればよい.

次に $\ker f \neq H$ の場合を考える.

命題5.3 より $\ker f$ は closed subsp. より.

$\exists x_0 \in (\ker f)^{\perp}$ s.t. $f(x_0) \neq 0$ とできる.

ここで, $\forall y \in H$ に対し. $z = y - \dfrac{f(y)}{f(x_0)} \cdot x_0$ とおくと.

$z \in \ker f$ となる. これより $\langle x_0, z \rangle = 0$ である.

$z = y - \dfrac{f(y)}{f(x_0)} x_0$ を代入すると.

$$0 = \left\langle x_0, y - \frac{f(y)}{f(x_0)} x_0 \right\rangle = \langle x_0, y \rangle - \frac{f(y)}{f(x_0)} \|x_0\|^2.$$

$\therefore$ $f(y) = \dfrac{f(x_0) \cdot \langle x_0, y \rangle}{\|x_0\|^2}$ となる.

ここで $x_f = \dfrac{\overline{f(x_0)}}{\|x_0\|^2} \cdot x_0$ とおくと.

$f(y) = \langle x_f, y_0 \rangle$ となり. 求める x_f になる.

次に一意性を示す.

x_f' も $f(y) = \langle x_f', y_0 \rangle$ をみたすとすると.

$0 = f(y) - f(y) = \langle x_f, y \rangle - \langle x_f', y \rangle = \langle x_f - x_f', y \rangle$ となる

ここで $y = x_f - x_f'$ とおくと

$\langle x_f - x_f', x_f - x_f' \rangle = \|x_f - x_f'\|^2 = 0$ となり $x_f = x_f'$ となる.

さいごに $\|f\| = \|x_f\|$ を示す. $x_f = 0$ なら明らかなので, $x_f \neq 0$ とする.

$\|f\| = \sup\{ |f(y)| \mid \|y\| = 1 \} = \sup\{ |\langle x_f, y \rangle| \mid \|y\| = 1 \} \leqq \|x_f\|.$

一方. $\|f\| \geqq \left| f\left(\dfrac{x_f}{\|x_f\|} \right) \right| = \dfrac{1}{\|x_f\|} \cdot \langle x_f, x_f \rangle = \|x_f\|$ より OK. //

リースの表現定理を使うと、$T \in B(H)$ に対し、共役作用素 (adjoint operator) T^* を定義することができる。

$^\forall x, y \in H$ に対し、

$f(y) = \langle x, Ty \rangle$ と定義すると、$f \in H^*$ であるので、

$^\exists x' \in H$ s.t

$\langle x, Ty \rangle = \langle x', y \rangle$ となる。今 $T^* x = x'$ とおき、

このように定義される T^* を adjoint operator という。

ここで $T^* \in B(H)$ である

$\because$ linear であること、

$$\langle T^*(x+y), z \rangle = \langle x+y, Tz \rangle = \langle x, Tz \rangle + \langle y, Tz \rangle$$
$$= \langle T^*x, z \rangle + \langle T^*y, z \rangle = \langle T^*x + T^*y, z \rangle$$

より、$T^*x + T^*y = T^*(x+y)$.

$$\langle T^*(\alpha x), y \rangle = \langle \alpha x, Ty \rangle = \bar{\alpha} \langle x, Ty \rangle$$
$$= \bar{\alpha} \langle T^*x, y \rangle = \langle \alpha(T^*x), y \rangle$$

より $T^*(\alpha x) = \alpha \cdot (T^*x)$.

bdd. であること、

$$\|T^*x\| = \sup |\langle T^*x, y \rangle| = \sup |\langle x, Ty \rangle| \leqq \|x\| \cdot \|Ty\|$$
$$= \|x\| \cdot \|T\| \cdot \|y\| = \|x\| \cdot \|T\|.$$ より、$\|T^*\| \leqq \|T\|$ である