有界線形作用素

H, K を Hilbert sp. とする. T を H から K への op. とする.

$^\exists C>0$ s.t. $^\forall x \in H$ に対し.

$\|Tx\| \leqq C \cdot \|x\|$ が成り立つとき.

T は有界であるといい. T は有界線形作用素 (bounded linear operator) という.

ここで. $\|T\| := \inf\{C>0 \mid \|Tx\| \leqq C\|x\|, {}^\forall x \in H\}$

$$= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \,\middle|\, x \in H,\ x \neq 0\right\}$$

$$= \sup\{\|Tx\| \mid x \in H,\ \|x\|=1\}$$

は有限の値になり. この $\|T\|$ を T の norm という.

また $B(H,K)$ で H から K への bdd op. 全体を表し.

$B(H)$ で H から H への bdd op. 全体を表す.

命題 5.2.

$B(H,K)$ に

和 : $(T+S)x = Tx + Sx$

スカラー倍 : $(\alpha T)x = \alpha \cdot Tx$ を定義すると.

$B(H,K)$ は norm sp. になる.

∵ vector sp. になる証明は略.

(1) $\|T\| \geqq 0$ は定義より明らか.

(2) $\|T\| = 0$

$\Leftrightarrow {}^{\forall}x \in H$, $\|x\| = 1$ に対し. $\|Tx\| = 0$

$\Leftrightarrow {}^{\forall}x \in H$, $\|x\| = 1$ に対し $Tx = 0$

$\Leftrightarrow {}^{\forall}x \in H$, $Tx = 0$

$\Leftrightarrow T = 0$

(3). $\|\lambda T\| = \sup\{\|\lambda Tx\| \mid x \in H, \|x\| = 1\}$

$= \sup\{|\lambda| \cdot \|Tx\| \mid x \in H, \|x\| = 1\}$

$= |\lambda| \cdot \sup\{\|Tx\| \mid x \in H, \|x\| = 1\}$

$= |\lambda| \cdot \|T\|.$

(4) $\|T+S\| = \sup\{\|(T+S)x\| \mid x \in H, \|x\| = 1\}$

$= \sup\{\|Tx\| + \|Sx\| \mid x \in H, \|x\| = 1\}$

$\leqq \sup\{\|Tx\| \mid x \in H, \|x\| = 1\} + \sup\{\|Sx\| \mid x \in H, \|x\| = 1\}.$

$= \|T\| + \|S\|$ //.

例7. 例3 の M_z の normは

$\|M_z\| = 1$ である.

例8. 例2 の M_g の normは

$\|M_g\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|.$ である

命題 5.3.

$T \in B(H, K)$ とする. $x_n \to x \in H$ とするとき.

$Tx_n \to Tx$ である.

$\because$ $\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\|$

$\leqq \|T\| \cdot \|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty)$ //.

例 9.

$A \in M(n; \mathbb{C})$ とする

A が unitary matrix U によって.

$UAU^* = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ と対角化されているとき.

$\|A\| = \max\{|\lambda_i|\}$ である.