§5 ヒルベルト空間上の線形作用素

H, K を Hilbert sp. とする

$$
\begin{array}{ccccc}
T: & H & \longrightarrow & K \\
 & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
 & x & \longmapsto & Tx
\end{array}
$$

が次の条件をみたすとき、T は線形 (linear) であるといい、T を H から K への線形作用素 (linear operator) という。

条件. $\forall x, y \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対し、

(1) $T(x+y) = Tx + Ty$

(2) $T(\alpha x) = \alpha \cdot Tx$

これは次の条件とも同値。

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot Tx + \beta \cdot Ty$$

以下、T を op. とする。T は次の式をみたす。

$\forall x_i \in H$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ に対し、

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot Tx_i$$

例1. $\mathbb{C}^m$ から $\mathbb{C}^n$ への operator T_A を $A \in M(n, m; \mathbb{C})$,

$x = (x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{C}^m$ に対し、

$$T_A x = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$ で定義すれば、T_A は op. になる。

例2. $L^2 = \{ f : \mathbb{R}上の関数 \mid \int |f(x)|^2 dx < +\infty \}$ とすると Hilbert sp. になる.

ここで. g : $\mathbb{R}$上の関数, $\sup|g(x)| = C < +\infty$ とし.

$$M_g : \begin{array}{ccc} L^2 & \longrightarrow & L^2 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ f & \longmapsto & g\cdot f \end{array}$$

で M_g を定義すると. M_g は op. になる

例3. $l^2 = \{ a = \{a_n\} \mid \sum |a_n|^2 < +\infty \}$ に対し.

$z = \{z_n\}$ を $|z_n| = 1$ をみたすとし.

$$M_z : \begin{array}{ccc} l^2 & \longrightarrow & l^2 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \{a_n\} & \longmapsto & \{a_n \cdot z_n\} \end{array}$$

で M_z を定義すると M_z は op. になる.

・HからKへの op. T, S が. $\forall x \in H$に対し.

$Tx = Sx$ をみたすとき、TとSは等しいといい. $T = S$ とかく.

・$\forall x, y \in H$ が $x \neq y$ であれば.

$Tx \neq Ty$ となるとき、Tは単射 (injection) であるという. また.

$\ker T = \{ x \in H \mid Tx = 0 \}$ を Tの kernel (核) という.

命題5.1. Tがinjection $\Leftrightarrow$ $\ker T = \{0\}$

㊟ ($\Rightarrow$). $T\cdot 0 = T(0\cdot 0) = 0\cdot(T\cdot 0) = 0$ より. $\ker T \ni 0$ である.

ここで. $x \in H$, $x \neq 0$ が. $Tx = 0$ になれば.

単射の条件に矛盾する. $\therefore$ $Tx \neq 0$ となり.

$\ker T = \{0\}$ になる

($\Leftarrow$) $^\forall x, y \in H$, $x \neq y$ とする.

もし $Tx = Ty$ ならば, $Tx - Ty = 0$ より

$T(x-y) = 0$, $\ker T = \{0\}$ より $x - y = 0$ となり矛盾.

$\therefore$ $Tx \neq Ty$ となり Tは単射になる.

<u>例4</u>. 例3の M_z は単射である.

・Tによる像を

$R(T) = \{Tx \mid x \in H\} \subset K$ とすると.

これは. Kの supsp. になる. これをTの値域 (range) という.

$R(T) = K$ のとき, Tは全射 (surjection) であるという.

Tが全射 $\Longleftrightarrow$ $^\forall y \in K$ に対し. $^\exists x \in H$ s.t. $Tx = y$ である.

・Tが全射かつ単射のとき. Tを全単射 (bijection) という.

・TとSを HからHへの operator とするとき, $^\forall x \in H$ に対し.

$STx = S(Tx)$ が定まり. STも HからHへの op. となる.

このSTを SとTの積 (product) という. $ST \neq TS$ に注意.

・Iを HからHへの op. で. $^\forall x \in H$ に対し.

$Ix = x$ をみたすものとする. このIを恒等作用素 (identity op) という

・T が H から H への op. で bijection であるとき.
$\forall y \in H$ に対し. $\exists^1 x \in H$ s.t. $Tx = y$ とできる
このとき. T^{-1} を
$T^{-1}y = x$ とすると. T^{-1} は op. になり
$TT^{-1} = T^{-1}T = I$ をみたす.
この T^{-1} を T の逆作用素 (inverse op) という.

例5. 例3の M_z は単射であるが. 実は全射でもある.
このとき. 逆作用素 M_z^{-1} は

$$M_z^{-1} : \begin{array}{ccc} \ell^2 & \longrightarrow & \ell^2 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \{a_n\} & \longmapsto & \{a_n \cdot \overline{z_n}\} \end{array}$$

で与えられる.

例6. $A, B \in M(n; \mathbb{C})$ とすると.
$T_A \cdot T_B = T_{AB}$ になる.
$\longrightarrow$ 行列の積を op. の積のように扱える.
また A^{-1} が存在したとすると.
$T_A \cdot T_{A^{-1}} = T_{A^{-1}} \cdot T_A = I$ となる.