

## 応用数学 演習問題・総まとめ

1. 周期  $2\pi$  をもち, 区間  $(-\pi, \pi]$  において次の式で与えられる関数のフーリエ級数を求めよ.

$$(1) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-\pi - x) & (-\pi < x \leq 0) \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & (0 < x \leq \pi) \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \pi - |x|$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi < x \leq 0) \\ 2 \cos x & (0 < x \leq \pi) \end{cases}$$

$$(4) f(x) = x$$

$$(5) f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x \leq 0) \\ 1 & (0 < x \leq \pi) \end{cases}$$

2. 次の関数の複素形フーリエ級数を求めよ.

$$(1) f(x) = e^x \quad (-\pi < x \leq \pi)$$

$$(2) f(x) = x \quad (-\pi < x \leq \pi)$$

$$(3) f(x) = \sin^3 x \quad (-\pi < x \leq \pi)$$

3. 周期  $2l$  ( $l$  では周期  $2$ ) をもち, 区間  $(-l, l]$  において次の式で与えられる関数のフーリエ級数を求めよ.

$$(1) f(x) = |x| \quad (-l < x \leq l)$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} -1 & (-l < x \leq 0) \\ 1 & (0 < x \leq l) \end{cases}$$

$$(3) f(x) = x \quad (-l < x \leq l)$$

4. 関数  $f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad (-\pi < x \leq \pi)$  にパーセバルの等式を

使って  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$  を求めよ.

5. 上の問題の式と項別微分を使い  $g(x) = x$  のフーリエ級数を求めよ.

6. 次の関数のフーリエ積分を求めよ. ただし  $a > 0$  とする.

$$(1) f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq a) \\ -1 & (-a \leq x < 0) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq a) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

7. 次の関数のフーリエ変換を求めよ。ただし  $a > 0$  とする。

$$(1) f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq a) \\ -1 & (-a \leq x < 0) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq a) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

8. 次の関数のフーリエ余弦変換を求めよ。ただし  $a > 0$  とする。

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{a} & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (x > a) \end{cases}$$

9. 次の関数のフーリエ正弦変換を求めよ。ただし  $a > 0$  とする。

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (x > a) \end{cases}$$

10. 次のベクトルの外積を求めよ。

$$(1) a = (3, 5, -1), b = (2, -1, 3)$$

$$(2) a = (4, 2, -7), b = (5, -3, -2)$$

11. 次の3つのベクトルを3辺とする平行六面体の体積を求めよ。

$$(1) a = (1, 3, 2), b = (1, -1, -2), c = (-1, 3, 1)$$

$$(2) a = (1, -3, 1), b = (2, 3, 1), c = (-1, 1, -1)$$

12. ベクトル関数  $a(t) = (\cos t, \sin t, t)$  について,  $a'(t), |a'(t)|, a''(t), |a''(t)|$  をそれぞれ求めよ。

13. ベクトル関数  $a(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $b(t) = (t, -t^2, t^3)$  について,  $(a \cdot b)', (a \times b)'$  をそれぞれ求めよ。

14. 次のベクトル関数  $v(t)$  についての微分方程式を解け。ただし,  $c$  は定ベクトル,  $P(t)$  は関数,  $Q(t)$  はベクトル関数とする。

$$(1) v'(t) = c$$

$$(2) v'(t) + v(t) \cdot \tan t = (\cos t, 0, 0)$$

$$(3) v'(t) + P(t) \cdot v(t) = Q(t)$$

15. 次の曲線の  $t = 0$  から  $t = t$  までの弧長  $s$  と単位接線ベクトル  $t$  を媒介変数  $t$  を用いて表せ。

$$(1) r(t) = (2t^3, 3t, 3t^2)$$

$$(2) r(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$$

$$(3) r(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

16. 次の曲線の単位接線ベクトル  $t$ , 単位主法線ベクトル  $n$ , 単位従法線ベクトル  $b$ , 曲率  $\kappa$ , 捩率  $\tau$  をそれぞれ求めよ (弧長媒介変数  $s$  を用いて表せ。)

$$(1) r(t) = (a \sin t, a \cos t, 0)$$

$$(2) r(t) = (a \sin t, a \cos t, bt)$$