ベクトル解析.

空間に原点 O と x, y, z 軸を考える (座標空間を考える)

ベクトル a は $a=(a_1, a_2, a_3)$ で表されている.

またベクトル a の長さは $|a|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ で表されている.

ここで. $a=(a_1, a_2, a_3)$ と $b=(b_1, b_2, b_3)$ の内積を

$$a\cdot b=|a|\cdot|b|\cdot\cos\theta$$ で定義する.

ただし. θ は a と b のなす角である.

余弦定理より

$$|b-a|^2=|a|^2+|b|^2-2|a|\cdot|b|\cdot\cos\theta$$ より.

$$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2$$

$$=a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2-2\cdot a\cdot b$$

$\therefore\ a\cdot b=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ となる まとめると.

<u>定理 1.1.</u> ベクトル a, b に対し

$$|a|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

$$a\cdot b=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$ である

また a, b のなす角 θ は

$$\cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}$$ で表される.

a と b が垂直であるとき $a\perp b$ とかく.

<u>定理 1.2.</u> $a\perp b \Leftrightarrow a\cdot b=0$

a, b に垂直なベクトル v を考えると.

$$a\cdot v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$$

$$b\cdot v = b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 = 0$$ より.

$$v_3 = \frac{-a_2v_2 - a_1v_1}{a_3}$$ となり

$$b_1v_1 + b_2v_2 - \frac{b_3}{a_3}(a_2v_2 + a_1v_1) = 0$$

$$\left(b_2 - \frac{a_2b_3}{a_3}\right)v_2 = \left(\frac{a_1b_3}{a_3} - b_1\right)v_1$$ より

$$v_2 = \frac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_3b_2 - a_2b_3}v_1$$ となる

同様にして $$v_3 = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_2b_3 - a_3b_2}v_1$$ となる

$$\therefore v_1 : v_2 : v_3 = (a_2b_3 - a_3b_2) : (a_3b_1 - a_1b_3) : (a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$ となる

また. a と b で作る平行四辺形の面積 S は

$$S = |a|\cdot\sin\theta\cdot|b|$$ より

$$S^2 = |a|^2\cdot|b|^2\cdot(1-\cos^2\theta) = |a|^2\cdot|b|^2\cdot\left(1 - \left(\frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}\right)^2\right)$$

$$= |a|^2\cdot|b|^2 - (a\cdot b)^2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

$$= (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 - (a_3b_1 - a_1b_3)^2$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2$$ となる

ここで $v = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$ を

aとbの外積といい，$a \times b$で表す．

$a \times b$ は $(a \times b) \perp a$，$(a \times b) \perp b$ をみたし．

$|a \times b| = S$ をみたす．

問題 次のベクトルの外積を求めよ．

(1) $a = (3, 5, -1)$，$b = (2, -1, 3)$

(2) $a = (4, -2, 7)$，$b = (5, -3, -2)$

答．(1) $a \times b = \left(\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right)$

$= (14, -11, -13)$

(2) $a \times b = \left(\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \right)$

$= (25, 43, -2)$

定理1.4. 外積は次をみたす．

(1) $a \times b = -(b \times a)$

(2) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

(3) $(\alpha a) \times b = a \times (\alpha b) = \alpha (a \times b)$

(4) $|a \times b| = S$

$$|a\ b\ c| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$ を. a, b, c の三重積という.

定理1.5 三重積は次をみたす.

(1) $|a\ b\ c| = (a\times b)\cdot c = (b\times c)\cdot a = (c\times a)\cdot b$

(2) $a\times(b\times c) = (a\cdot c)\cdot b - (a\cdot b)\cdot c$

(3) $|a\ b\ c|$ の絶対値は. a, b, c の作る平行六面体の体積と等しい

∵ (1) $a\cdot(b\times c)$

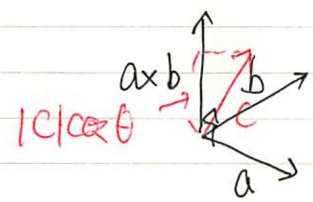
$$= a_1\cdot\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \underbrace{a_2\cdot\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}}_{-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}} + a_3\cdot\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = |a\ b\ c|$$ となる

(2) 略

cと$a\times b$のなす角

(3) $|a\ b\ c| = (a\times b)\cdot c = |a\times b|\cdot|c|\cdot\cos\theta = S\cdot|c|\cdot\cos\theta$



となり 図より示される

定理1.6.

(1) aとbが 1次従属 $\Longleftrightarrow$ $a\times b = 0$

(2) aとbとcが1次従属 $\Longleftrightarrow$ $|a\ b\ c| = 0$

問題 a, b, c を3辺とする平行六面体の体積を求めよ

(1) $a=(1,3,2)$ $b=(1,-1,-2)$ $c=(-1,3,1)$

(2) $a=(1,-3,1)$ $b=(2,3,1)$ $c=(-1,1,-1)$

答(1) $|a\ b\ c| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= -1+6+6+6-3-2 = 12$

(2) $|a\ b\ c| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= -3+3+2+3-6-1$

$= -2$ より

体積は 2. である