フーリエ変換と．反転公式は．

$$F(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,e^{-i\tau\xi}\,d\xi$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\tau)\,e^{i\tau x}\,d\tau$$

であった．

$$\begin{cases}\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})\\ \sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})\end{cases}$$

を使う．

例． $f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqq x\leqq a\\ -1 & -a\leqq x<0\\ 0 & その他\end{cases}$ のフーリエ変換と．複素形フーリエ積分を求めよ

答． $F(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,e^{-i\tau\xi}\,d\xi$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{0}-e^{-i\tau\xi}\,d\xi+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{a}e^{-i\tau\xi}\,d\xi$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{i\tau}e^{-i\tau\xi}\right]_{-a}^{0}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{-i\tau}e^{-i\tau\xi}\right]_{0}^{a}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{i\tau}-\frac{1}{i\tau}e^{i\tau a}-\frac{1}{i\tau}e^{-i\tau a}+\frac{1}{i\tau}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot i\tau}\left(2-(e^{i\tau a}+e^{-i\tau a})\right)$$

$$=\frac{1}{i\tau\cdot\sqrt{2\pi}}(2-2\cdot\cos a\tau)=\frac{i\sqrt{2}}{\tau\cdot\sqrt{\pi}}(\cos a\tau-1)$$ である

これより

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\sqrt{2}}{\tau\sqrt{\pi}}e^{i\tau x}\,d\tau=\frac{i}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tau}(\cos a\tau-1)e^{i\tau x}\,d\tau$$ である

問題 (1) $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqq a\\ 0 & その他\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}e^{-ax} & (x\geqq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$ のフーリエ変換を求めよ

答 (1) $F(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cdot e^{-i\tau\xi}d\xi$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}e^{-i\tau\xi}d\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left[\frac{1}{-i\tau}e^{-i\tau\xi}\right]_{-a}^{a}$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\tau}\cdot\frac{1}{i}\left(-e^{-i\tau a}+e^{i\tau a}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\tau}2\sin a\tau$

$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\cdot\tau}\sin a\tau$ である

(2) $F(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cdot e^{-i\tau\xi}d\xi$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-a\xi}\cdot e^{-i\tau\xi}d\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-(a+i\tau)\xi}d\xi$.

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{1}{a+i\tau}e^{-(a+i\tau)\xi}\right]_{0}^{\infty}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{a+i\tau}$ である

↑ ξ に ∞ を代入すれば 0

フーリエ余弦級数・正弦変換.

定理 2.2.

周期 2π をもつ関数 $f(x)$ が.

(1). 偶関数ならば.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos nx$$

(2) 奇関数ならば

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot\sin nx$$ である.

∵ (1) $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin nx\,dx=0$

(2) $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos nx\,dx=0$.

//

関数 f が $[0, \pi]$ で定義されているとき、$-\pi < x < 0$ で

$f(x) = f(-x)$ とすれば、$f(x)$ は偶関数になる。そのときの (1) を

$f(x)$ の フーリエ余弦級数 とよぶ。

また、$f(x) = -f(-x)$ とすれば、$f(x)$ は奇関数になる。

そのときの (2) を $f(x)$ の フーリエ正弦級数 とよぶ

定理5.3. $(-\infty, \infty)$ で定義された関数 f が

(1) 偶関数 なら、

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cdot \sin \tau\xi \cdot d\xi = 0$$ より、

$$C(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \tau\xi \, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} A(\tau)$$ とおけば、

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} C(\tau) \cdot \cos \tau x \cdot dx$$ とできる。

(2) 奇関数 なら

$$A(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cdot \cos \tau\xi \, d\xi = 0$$ より

$$S(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \cdot \sin \tau\xi \cdot d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} B(\tau)$$ とおけば

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} S(\tau) \cdot \sin \tau x \, dx$$ とできる

ここで、$C(\tau)$ を $f(x)$ の 余弦変換

$S(\tau)$ を $f(x)$ の 正弦変換 という。

また、$[0, \infty)$ 上で定義された関数に対し、$-\infty < x < 0$ で、

$f(x) = f(-x)$, $f(x) = -f(x)$ と定義すれば、これらの式を適用できる。

例　$f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{a} & (0\leqq x\leqq a)\\ 0 & x>a\end{cases}$　のフーリエ余弦変換を求めよ.

答　$C(\tau)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^\infty f(\xi)\cdot\cos\tau\xi\cdot d\xi=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a\left(1-\frac{\xi}{a}\right)\cos\tau\xi\, d\xi$

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a\cos\tau\xi\cdot d\xi-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{a}\int_0^a\xi\cdot\cos\tau\xi\, d\xi$

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{1}{\tau}\sin\tau\xi\right]_0^a-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{a}\cdot\left[\frac{1}{\tau}\xi\cdot\sin\tau\xi\right]_0^a+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{a}\int_0^a\frac{1}{\tau}\sin\tau\xi\, d\xi$

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\tau}\sin\tau a-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\tau}a\cdot\sin\tau a+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\tau}\left[\frac{-1}{\tau}\cos\tau\xi\right]_0^a$

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{a\tau^2}(1-\cos\tau a)$　である

問題　$f(x)=\begin{cases}x & 0\leqq x\leqq a\\ 0 & x>a\end{cases}$　のフーリエ正弦変換を求めよ

答　$S(\tau)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(\xi)\cdot\sin\tau\xi\cdot d\xi$

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a\xi\cdot\sin\tau\xi\cdot d\xi.$

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\left[-\frac{1}{\tau}\xi\cos\tau\xi\right]_0^a+\frac{1}{\tau}\int_0^a\cos\tau\xi\, d\xi\right)$

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\frac{a}{\tau}\cos a\tau+\frac{1}{\tau}\left[\frac{1}{\tau}\sin\tau\xi\right]_0^a\right)$

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{\tau^2}\sin a\tau-\frac{a}{\tau}\cdot\cos a\tau\right)$　である