フーリエ積分

実数$\mathbb{R}$上で定義された、周期的でない関数 f のフーリエ級数を考えたい.

まず、これを考えるために. f は.

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < +\infty$ という条件をみたすと仮定しておく.

この条件をみたす f は.絶対積分可能であるという.

f に対し. ある数 l をとり. f を $[-l, l]$ 上に制限した関数 f_l を考える.

f_l を.周期 $2l$ の関数だと思えば、f_l のフーリエ級数を求めることができる

そのあとで、$l \to \infty$ とすれば. $f_l \to f$ ということになるので.

f_l のフーリエ級数 の $l \to \infty$ とすることで、f のフーリエ級数を求めてみる

f_l の フーリエ級数 は.

$$f_l(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot \cos\frac{\pi n}{l}x + b_n \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x\right)$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n}{l}x\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x\, dx$$

であったので.

$$\begin{aligned} f_l(x) &= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\cdot\cos\frac{\pi n}{l}x\cdot\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\cos\frac{\pi n}{l}x\cdot dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot dx \end{aligned}$$

である.

ここで、$\omega_n = \frac{\pi n}{l}$, $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi(n+1)}{l} - \frac{\pi n}{l} = \frac{\pi}{l}$ とすると.

$$f_l(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\cdot\Delta\omega\cdot\cos\omega_n x\cdot\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\cos\omega_n\cdot x\,dx$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\Delta\omega\cdot\sin\omega_n x\cdot\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\sin\omega_n x\,dx.$$

となる．ここで，$l \to \infty$ とすると，

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\tau x\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\cos\tau x\cdot dx\cdot d\tau$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\tau x\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\sin\tau x\cdot dx\cdot d\tau$$ となる．

注．$\int_0^{\infty} g(\tau)\,d\tau = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{l}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{n}{l}\right)\right\}$ を使った．

これを $f(x)$ の フーリエ積分 という．まとめると

定理5.1．関数 f のフーリエ積分は．

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} A(\tau)\cdot\cos\tau x + B(\tau)\cdot\sin\tau x\cdot dx$$ である．ここで．

$$A(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\tau\cdot\xi\cdot d\xi.$$
$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\sin\tau\xi\cdot d\xi$$ である．

フーリエ積分の収束については．次の定理が知られている．

定理5.2．関数 f が，絶対積分可能かつ．区分的に滑らかであれば．フーリエ積分は．

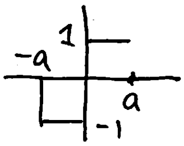
(1)．$f(x)$ が連続な点では $f(x)$ に一致し．

(2)．不連続な点では．$\frac{1}{2}\left(f(x+0) + f(x-0)\right)$ に一致する．

以下．断らないかぎり．関数 f は 定理5.2の条件をみたすとする

例. 次の関数のフーリエ積分を求めよ.　　$(a>0)$

$$f(x)=\begin{cases}1 & (0\leqq x\leqq a)\\ -1 & (-a\leqq x<0)\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$



答. $f(x)$は奇関数より

$$A(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\tau\xi\,d\xi=0$$

$$B(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cdot\sin\tau\xi\,d\xi=2\cdot\int_{0}^{\infty}f(\xi)\sin\tau\xi\cdot d\xi$$

$$=2\cdot\int_{0}^{a}\sin\tau\xi\cdot d\xi=2\left[\frac{-1}{\tau}\cdot\cos\tau\xi\right]_{0}^{a}$$

$$=2\left(-\frac{1}{\tau}\cos a\tau+\frac{1}{\tau}\right)=\frac{2}{\tau}\cdot(1-\cos a\tau)$$ である

$$\therefore f(x)=\frac{2}{\pi}\cdot\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\tau}\cdot(1-\cos a\tau)\cdot\sin\tau x\,d\tau$$ である.

問題. 次の関数のフーリエ積分を求めよ.　　$(a>0)$

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqq a\\ 0 & |x|>0\end{cases}$$

答. $f(x)$は偶関数より.

$$B(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cdot\sin\tau\xi\,d\xi=0$$

$$A(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\tau\xi\,d\xi=2\cdot\int_{0}^{\infty}f(\xi)\cdot\cos\tau\xi\cdot d\xi$$

$$=2\cdot\int_{0}^{a}\cos\tau\xi\cdot d\xi=2\cdot\left[\frac{1}{\tau}\sin\tau\xi\right]_{0}^{a}$$

$$=2\cdot\frac{1}{\tau}\sin a\tau$$ である

$$\therefore f(x)=\frac{2}{\pi}\cdot\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\tau}\cdot\sin a\tau\cdot\cos\tau x\,d\tau$$ である.

フーリエ積分を変形すると．

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cdot\cos\tau\xi\, d\xi\cdot\cos\tau x+\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\sin\tau\xi\cdot d\xi\cdot\sin\tau\xi\cdot d\tau$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(\xi)(\cos\tau\xi\cdot\cos\tau x+\sin\tau\xi\cdot\sin\tau x)\cdot d\xi\cdot d\tau$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(\xi)(\cos(\tau x-\tau\xi))\, d\xi\cdot d\tau$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos\tau(x-\xi)\cdot d\xi\cdot d\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cdot\cos\tau(x-\xi)\, d\xi\, d\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\cdot\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cdot\cos\tau(x-\xi)\,d\xi+i\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cdot\sin\tau(x-\xi)\,d\xi\quad d\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\cdot\int_{-\infty}^\infty f(\xi)(\cos\tau(x-\xi)+i\sin\tau(x-\xi))\,d\xi\cdot d\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\cdot\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cdot e^{i\tau(x-\xi)}\,d\xi\cdot d\tau$$ とできる．

これを $f(x)$ の 複素形フーリエ積分 という．

定理5.4．関数 f に対し．

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\cdot\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cdot e^{-i\tau(\xi-x)}\,d\xi\cdot d\tau$$ とできる．

ここで．$e^{-i\tau(\xi-x)}=e^{-i\tau\xi}\cdot e^{i\tau x}$ に注意すれば、次を得る

定理5.5．関数 f に対し．

$$F(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\,e^{-i\tau\xi}\,d\xi$$ とすると．

☆… $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty F(\tau)\cdot e^{i\tau x}\,d\tau$$ とできる．

$F(\tau)$ を $f(x)$ の フーリエ変換 $f(x)$ を 反転公式 という．