フーリエ級数の等式, 不等式.

ベッセルの不等式. f を区分的に連続な関数とする.

$S_n(x)$ を. フーリエ級数の n までの和とする. すなわち.

$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \cos kx + b_k \sin kx$ とする. ここで.

$J = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x))^2 dx$ を考える.

右辺 $= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_n(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x)^2 dx \geqq 0$ より.

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx &\geqq 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_n(x) dx - \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x)^2 dx \\
&= 2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cdot f(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot f(x) \cdot \cos kx + b_k f(x) \cdot \sin kx \, dx \\
&\quad - \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx\right)^2 dx \\
&= 2\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\right) \\
&\quad - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\right) \\
&= \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\right)
\end{aligned}$$

$\therefore \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leqq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$ を得る.

これをまとめると.

定理4.1. $[-\pi, \pi]$ 上で区分的に連続な関数 f について.

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leqq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$$ となる.

とくに．fが$[-\pi,\pi]$で連続で区分的に滑らかであれば．

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n(x))^2\,dx=0$$ となるので．

さっきの不等号ではなく、等号にすることができる．すなわち．

定理 4.2．$f(x)$が区間$[-\pi,\pi]$で連続かつ区分的に滑らかならば．

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2\,dx=\frac{a_0^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$ となる

例．$f(x)=|x|$ $(-\pi\leqq x\leqq\pi)$のフーリエ級数は．

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$ であった．

一方．$$\int_{-\pi}^{\pi}|x|^2\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=2\int_{0}^{\pi}x^2\,dx=2\cdot\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi}$$
$$=\frac{2}{3}\pi^3$$ である．

ここにパーセバルの等式を適用すれば．

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2}{3}\pi^3=\frac{\pi^2}{2}-\frac{16}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right)=\frac{\pi^2}{2}-\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

$$\therefore\ \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{2}{3}\pi^2-\frac{\pi^2}{2}=\frac{1}{6}\pi^2$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$ である

問題．$f(x)=x^2=\dfrac{\pi^2}{3}+4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$ $(-\pi\leqq x\leqq\pi)$ に

パーセバルの等式を使って．$\sum\frac{1}{n^4}$ を求めよ．

答. $\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx = 2\int_0^{\pi} x^4\,dx = 2\cdot\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^{\pi} = \frac{2}{5}\pi^5$ である.

$$\therefore\ \frac{1}{\pi}\frac{2}{5}\pi^5 = \frac{2}{9}\pi^4 + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{90}\pi^4$$ である.

注意. パーセバルの等式を使うと.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n(x))^2\,dx = \sum_{k=n+1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$$ となり. 誤差の大きさを求めることができる.

次の2つの定理が成り立つ.

定理4.3. f が $[-\pi,\pi]$ で区分的に連続ならば、 $x\in[-\pi,\pi]$ に対し.

$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{a_0}{2}\cdot\int_0^x dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x (a_n\cdot\cos nx + b_n\sin nx)\,dx$$
$$= \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin nx + \frac{b_n}{n}(1-\cos nx)\right)$$ となる.

定理4.4. 周期 2π の関数 f が連続で区分的に滑らかならば.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-n\cdot a_n\cdot\sin nx + n b_n\cdot\cos nx)$$ が成り立つ.

例. $f(x)=|x|$ の項別微分を考える

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right)$$ であったので、

フーリエ級数の微分は.

$$\frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\cos 5x + \cdots\right)$$ となり.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$ のフーリエ級数と一致する.

問題　$f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$　を使って

$g(x)=x$ のフーリエ級数を求めよ

答　$f'(x)=2x$　より。

$$g(x)=\frac{1}{2}\left(4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cdot(-n)\cdot\sin nx\right)$$

$$=2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\sin nx$$　となる。