一般区間におけるフーリエ級数.

周期 $2l$ の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を考えたい.

区間 $[-l, l]$ $\longrightarrow$ 区間 $[-\pi, \pi]$ と縮める(広げる)ようにするには.

$\xi = \frac{\pi}{l}x \quad \left(x = \frac{l}{\pi}\xi\right)$ とすればよい.

実際にやってみると.

$g(\xi) = f\left(\frac{l}{\pi}\xi\right)$ とおけば、$g(\xi)$ は周期 2π の関数になる.

なので、$g(\xi)$ のフーリエ級数を考えて.

$$g(\xi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos n\xi + b_n \sin n\xi)$$ となる.

本当にほしいのは $f(x)$ なので、$\xi = \frac{\pi}{l}x$ を代入すれば.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$ となる.

ここで、a_n と b_n は $d\xi = \frac{\pi}{l} \cdot dx$ を使うと.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\xi) \cdot \cos n\xi \, d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x) \cdot \cos\frac{n\pi}{l}x \cdot \frac{\pi}{l}\, dx$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cdot \cos\frac{n\pi}{l}x \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\xi) \sin n\xi \, d\xi = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x \, dx$$ となる.まとめると.次を得る

定理 3.1. 周期 $2l$ をもつ関数 $f(x)$ のフーリエ級数は.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$ である.フーリエ係数は.

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cdot \cos\frac{n\pi}{l}x \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x \, dx$$ となる.

例. 次の周期 $2l$ の関数のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = |x| \quad (-l \leqq x \leqq l)$$

答. $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} |x| \cdot \cos\frac{n\pi}{l}x \, dx = \frac{2}{l}\int_0^l x \cdot \cos\frac{n\pi}{l}x \cdot dx$

$$= \frac{2}{l}\left[\frac{l}{n\pi} \cdot x \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x\right]_0^l - \frac{2}{l}\int_0^l \frac{l}{n\pi} \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x \, dx$$

$$= \frac{-2}{n\pi} \cdot \left[\frac{l}{n\pi}\left(-\cos\frac{n\pi}{l}x\right)\right]_0^l$$

$$= \frac{2l}{n^2\pi^2}(\cos n\pi x - 1) = \begin{cases} 0 & n\text{が偶数} \\ \frac{-4l}{n^2\pi^2} & n\text{が奇数}. \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} |x| \, dx = \frac{2}{l}\int_0^l x \, dx = l$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} |x| \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x \, dx = 0.$$

これより. $f(x) = \frac{l}{2} + \frac{-4l}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos\frac{(2n-1)\pi}{l}x$ である.

問題. 次の周期 $2l$ ((2)は 2) の関数のフーリエ級数を求めよ.

(1) $f(x) = \begin{cases} -1 & (-l < x < 0) \\ 1 & (0 \leqq x \leqq l) \end{cases}$

(2) $f(x) = x \quad (-1 < x \leqq 1)$.

答.(1). $f(x)$ は奇関数より

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cos\frac{n\pi}{l}x \, dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx$$

$$= \frac{2}{\ell}\cdot\left[\frac{-\ell}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{\ell}x\right]_0^{\ell} = -\frac{2}{n\pi}(\cos n\pi x - 1)$$

$$= \begin{cases} 0 & n\text{が偶数} \\ \dfrac{4}{n\pi} & n\text{が奇数.} \end{cases}$$

$$\therefore\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)\pi}\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi}{\ell}x \quad \text{である}$$

(2). $f(x)$は奇関数より.

$$a_n = 0.$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} x\cdot\sin n\pi\cdot x\cdot dx = 2\cdot\int_0^1 x\cdot\sin n\pi x\,dx$$

$$= 2\cdot\left[x\cdot\left(-\frac{1}{n\pi}\right)\cdot\cos n\pi x\right]_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1\cos n\pi x\,dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi + \left[\frac{2}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{n\pi}\cdot(-1)^{n-1}$$

$$\therefore\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(-1)^{n-1}\cdot\sin n\pi x. \quad \text{である.}$$