※前回のノートの残りを先にやります.

複素形フーリエ級数.

e^x をマクローリン展開すると.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$ とできる.

一方 $\sin x$ と $\cos x$ は それぞれ

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$ とできている.

ここで、e^{ix} を考えると.

$$e^{ix} = 1 + i\cdot x + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{i\cdot x^5}{5!} - \cdots$$

$$= \cos x + i\cdot\sin x$$ とすることができる.

同様に

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i\cdot\sin(-x) = \cos x - i\sin x$$ とできる.

逆に.

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}),\ \sin x = \frac{1}{2i}\cdot(e^{ix} - e^{-ix})$$ と表すこともできる.

これを使うと.

$$a_n\cdot\cos nx + b_n\cdot\sin nx$$

$$= a_n\cdot\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} + b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i} = a_n\cdot\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} - i\cdot b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}$$

$$= \frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-inx}$$ となる. ここで

$c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$ とおけば、フーリエ級数は.

$$f_x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos x + b_n \cdot \sin x)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{inx}$$ と表される.

ここで、係数 c_n は.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx$$ である.

$c_{-n} = \overline{c_n}$ より. この式は n が負でも成り立つ.

これらをまとめると. 次の定理を得る.

定理2.2. 周期 2π をもつ関数 $f(x)$ は.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{inx}$$
$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{-inx}\,dx$$ の形で表される.

これを. $f(x)$ の**複素形フーリエ級数**という.

また、c_n を**複素形フーリエ係数**という.

これまでのフーリエ級数は**実数形**という.

・公式 : ・$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\cdot e^{ax} + C$ は a が複素数でも使える.
・$e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$

例. $f(x) = e^x$ $(-\pi < x \leqq \pi)$ の複素形フーリエ級数を求めよ.

答. $$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-in)}\Big[e^{(1-in)x}\Big]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-in)}\left(e^{\pi-in\pi} - e^{-\pi+in\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-in)}\cdot\left(e^{\pi}\cdot(\cos n\pi - i\sin n\pi) - e^{-\pi}(\cos n\pi + i\sin n\pi)\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\pi(1-in)}(e^{\pi}-e^{-\pi})$$ である

$\therefore\ f(x) = \sum \frac{(-1)^n}{2\pi(1-in)}(e^{\pi}-e^{-\pi})\cdot e^{inx}$ である.

<u>問題</u>. 次の関数の複素形フーリエ級数を求めよ

(1) $f(x) = x \quad (-\pi < x \leqq \pi)$

(2) $f(x) = \sin^3 x \quad (-\pi < x \leqq \pi)$

答 (1). $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot e^{-inx}\,dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{1}{-in}x\cdot e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi\cdot(-1)^n}{-in} - \frac{\pi(-1)^n}{in} - \frac{1}{(in)^2}\left[e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{in}(-1)^{n-1}$$ となる　$C_0 = 0$ より

$\therefore\ f(x) = \sum_{n\neq 0} \frac{1}{in}(-1)^{n-1} e^{inx}$ である

(2). $\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{-1}{8i}\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right)$

とできる.