## 先週の復習

関数 $f(x)$ が周期 $2\pi$ であるとき、

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos nx+b_n\sin n\cdot x)$$

とできていた.

ここで、係数 $a_n$ と $b_n$ は

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos nx\ dx \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\ dx \qquad (n=1,2,\cdots)$$

で求めることができた.

## 問題

$[-\pi,\pi]$ で次の式で与えられる周期 $2\pi$ の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ

(1) $$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(-\pi-x) & (-\pi<x\leqq 0)\\ \frac{1}{2}(\pi-x) & (0<x\leqq\pi)\end{cases}$$

(2) $$f(x)=\begin{cases}0 & (-\pi<x<0)\\ 2\cdot\cos x & (0\leqq x\leqq\pi)\end{cases}$$

答. (1). $f(x)$は奇関数なので. $f(x)\cos nx$も奇関数.

$\therefore a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = 0$.

$f(x)\sin nx$ は偶関数より.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin nx \cdot dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{n}(\pi - x)\cos nx\ dx\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nx\ dx$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{\pi n}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n}$$

$\therefore f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots$ である.

(2) $f(x)$は $(-\pi, 0)$ で $0$ をとるので.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\ dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cdot\cos x\cdot\cos nx\cdot dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n+1)x + \cos(n-1)x\ dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+1}\sin(n+1)x + \frac{1}{n-1}\sin(n-1)x\right]_0^{\pi} \qquad (n \neq 1 \text{ のとき})$$
$$= 0.$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+1}\sin(n+1)x + x\right]_0^{\pi} = 1.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\ dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cdot\cos x\cdot\sin nx\cdot dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(1+n)x - \sin(1-n)x\ \ dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{1+n}\cos(1+n)x + \frac{1}{1-n}\cos(1-n)x\right]_0^{\pi} \qquad (n \neq 1 \text{ のとき})$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-1}{1+n}\left(\cos\pi(n+1)\right)+\frac{1}{1-n}\left(\cos\pi(1-n)x\right)+\frac{1}{1+n}-\frac{1}{1-n}\right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4n}{\pi(n^2-1)} & (n\text{が偶数}) \\ 0 & (n\text{が奇数}) \end{cases}$$ であり

$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x \, dx = 0$ となる.

$\therefore f(x) = \cos x + \frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{\pi(4n^2-1)}\cdot\sin 2nx$ となる.

この問題で与えられた関数は不連続な関数であるが.
不連続な点の近くでは.大きな誤差があらわれてくる.
これをギブス現象という.

<u>どんな関数がフーリエ級数で表せるか</u>:

一般に点 $c$ における関数 $f(x)$ の左側極限値と右側極限値を

左極限 : $f(c-0) = \lim_{h\to -0} f(c+h)$

右極限 : $f(c+0) = \lim_{h\to +0} f(c+h)$ とする.

関数 $f(x)$ が $x=c$ で連続とは.$f(c)$ が定義できていて.かつ
$f(c-0) = f(c+0)$ であるときをいう.

<u>例</u>. (1). $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-\pi - x) & (-\pi < x \leqq 0) \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & (0 < x \leqq \pi) \end{cases}$ は

$f(0+0) = \pi$ , $f(0-0) = -\pi$ であり.$x=0$ で不連続.

(2) $f(x)$ が連続なら $f(c+0) = f(c-0)$ である.

定義. 区間$[a,b]$で定義された関数$f(x)$が、有限個の点を除いては連続であり,
不連続な点では 左右の極限値が存在するとき.
$f(x)$は区間$[a,b]$で 区分的に連続 であるという.
無限区間で定義された$f(x)$は, 任意の有限区間で区分的に連続であるとき、
区分的に連続 という.

ある区間で関数$f(x)$の導関数$f'(x)$が区分的に連続であるとき、
$f(x)$を区分的に滑らか であるという.

→ 周期$2\pi$の関数は, $[-\pi,\pi]$だけから判定できる.

定理1.2. 周期$2\pi$の関数$f(x)$が区分的に滑らかならば、
$f(x)$のフーリエ級数は.

(1) $f(x)$が連続な点では. $f(x)$に収束する

(2). $f(x)$が不連続な点では.

$$\frac{1}{2}\left(f(x-0)+f(x+0)\right) \quad \text{に収束する}$$

例. $f(x)=\begin{cases} 0 & (-\pi<x<0) \\ x & (0\leqq x\leqq \pi)\end{cases}$ を考えると.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\cos nx\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\cdot x\cdot\sin nx\right]_0^{\pi}-\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi n}\left[\frac{1}{n}\cdot\cos nx\right]_0^{\pi}$$
$$=\begin{cases} 0 & (n\text{が偶数}) \\ \dfrac{-2}{\pi n^2} & (n\text{が奇数})\end{cases}=\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot \sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{n}x\cdot\cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{-1}{n}\cdot\pi\cdot\cos n\pi + \frac{1}{\pi n}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{n} & (nが偶数) \\ \frac{1}{n} & (nが奇数) \end{cases} = \frac{1}{n}(-1)^{n-1}.$$

$$\therefore f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x + \frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x - \frac{1}{2n}\sin 2nx\right)$$ とできる.

ここで不連続な点は. $x=\pi$ であるが.

フーリエ級数は. $\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{\pi(2n-1)^2}\cdot(-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\overbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}}^{\frac{\pi^2}{8}} = \frac{\pi}{2}$ となる.

$f(\pi+0) = 0$ , $f(\pi-0) = \pi$ なので、定理が成り立っている.

問題 次の関数のフーリエ級数を求め、その不連続点で定理が成り立っていることを示せ

(1) $f(x) = x$

(2) $f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (0 \leqq x \leqq \pi) \end{cases}$

答 (1) $f(x)$ は奇関数なので.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0.$$

上の計算から.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\sin nx\,dx = \frac{2}{n}(-1)^{n-1}$$

$$\therefore f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n-1}\cdot\sin nx.$$

ここで、不連続点は $x=\pi$ であるが、

フーリエ級数は、$x=\pi$ で $0$ をとる.

一方 $f(\pi+0)=-\pi$, $f(\pi-0)=\pi$ より定理をみたす.

(2). $f(x)$ は奇関数なので、

$$a_n=0.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}=\begin{cases}0 & (n\text{が偶数})\\ \dfrac{4}{\pi n} & (n\text{が奇数})\end{cases}$$

$$\therefore f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cdot\sin(2n-1)x \quad \text{である.}$$

ここで、不連続点は $0$ と $\pi$ であるが、

フーリエ級数は、$x=0$ で $0$, $x=\pi$ で $0$ をとる

一方 $f(0+0)=1$, $f(0-0)=-1$, $f(\pi+0)=-1$, $f(\pi-0)=1$ より定理をみたす.