問題

$r(t)=(t-\sin t,\ 1-\cos t,\ 4\sin\frac{t}{2})$ の

$\mathbf{t}, n, b, \kappa, \tau$ を求めよ

答 $\dot{r}(t)=(1-\cos t,\ \sin t,\ 2\cos\frac{t}{2})$ より.

$$s=\int_0^t |\dot{r}|\,dt=\int_0^t \sqrt{(1-\cos^2 t)+\sin^2 t+(2\cos\tfrac{t}{2})^2}$$

$$=\int_0^t 2\,dt=2t$$

これより $t=\frac{s}{2}$ となり.

$r(s)=\left(\frac{s}{2}-\sin\frac{s}{2},\ 1-\cos\frac{s}{2},\ 4\sin\frac{s}{4}\right)$ である.

$$\mathbf{t}=r'=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{s}{2},\ \frac{1}{2}\sin\frac{s}{2},\ \cos\frac{s}{4}\right)$$

$$\mathbf{t}'=r''=\left(\frac{1}{4}\sin\frac{s}{2},\ \frac{1}{4}\cos\frac{s}{2},\ -\frac{1}{4}\sin\frac{s}{4}\right)$$

$$r'''=\left(\frac{1}{8}\cos\frac{s}{2},\ -\frac{1}{8}\sin\frac{s}{2},\ -\frac{1}{16}\cos\frac{s}{4}\right)$$

$$\therefore\ \kappa=|r''|=\frac{1}{4}\sqrt{\sin^2\frac{s}{2}+\cos^2\frac{s}{2}+\sin^2\frac{s}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{1+\sin^2\frac{s}{4}}$$

$$n=\frac{1}{\kappa}\cdot\mathbf{t}'=\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\frac{s}{4}}}\left(\sin\frac{s}{2},\ \cos\frac{s}{2},\ -\sin\frac{s}{4}\right)$$

$$\tau=\frac{1}{\kappa^2}|r'\ r''\ r'''|=\Big\{\left(\cos\frac{s}{2}-\cos^2\frac{s}{2}-\sin^2\frac{s}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\cos\frac{s}{4}\right)$$

$$+2\cos\frac{s}{4}\cdot\left(-\sin^2\frac{s}{2}-\cos^2\frac{s}{2}\right)-\sin\frac{s}{4}\cdot\left(\sin\frac{s}{2}\cos\frac{s}{2}+\sin\frac{s}{2}-\sin\frac{s}{2}\cdot\cos\frac{s}{2}\right)\Big\}\cdot\frac{1}{4(1+\sin^2\frac{s}{4})}$$

$$=\frac{1}{4(1+\sin^2\frac{s}{4})}\cdot\left(\frac{1}{2}\cos\frac{s}{2}\cdot\cos\frac{s}{4}-\sin\frac{s}{2}\sin\frac{s}{4}-\frac{3}{2}\cos\frac{s}{4}\right)=\frac{-(2+\sin^2\frac{s}{4})\cos\frac{s}{4}}{4(1+\sin^2\frac{s}{4})}.$$

$$b=\mathbf{t}\times n=\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\frac{s}{4}}}\left(-\cos^2\frac{s}{4},\ \left(1+\cos^2\frac{s}{4}\right)\sin\frac{s}{4},\ -\sin^2\frac{s}{4}\right)$$ である

スカラー場・ベクトル場

空間の各点Pに対し、実数 $f(P)$ が対応するとき、

関数 f を スカラー場 という。

温度、質量密度、電位などの分布はスカラー場である。

空間の各点Pに対し、ベクトル $a(P)$ が対応するとき、

a を ベクトル場 という。

重力場・電場、磁場、流体内の速度などはベクトル場である

⟶ 流体力学などへの応用に使える