曲線 C の 法線ベクトル（接線ベクトルと直交するベクトル）を考える.

まず. 一般のベクトル関数 $a(t)$ が. $|a(t)|$ が一定であれば

$a(t) \perp a'(t)$ がわかる

$\because$ $a \cdot a' = \frac{1}{2}(|a|^2)' = 0$ より わかる.

これより. $t \perp t'$ がわかる.

もし. $t' = 0$ であれば、 $r''(s) = t'(s) = 0$ より.

$r(s) = As + B$ を導くことができ. $r(s)$ は直線になる.

$t' \neq 0$ のとき.

$\kappa(s) = |t'| = |r''| = \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2}$ とおいて.

$n(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \cdot t' = \frac{1}{\kappa(s)} r''(s)$ とすると.

$n(s)$ は単位ベクトルになる.

この $n(s)$ を単位主法線ベクトル という.

ところで. $r''(s)$ を加速度としてとらえると.

曲線Cは. 点 s で t 方向にむかっていて. $n(s)$ 方向に力をうけているとみれる.

$\therefore$ t と n で張られる平面を接触平面 という.

さらに. $b(s) = t(s) \times n(s)$ を.

単位従法線ベクトル といい.

$n(s)$ と $b(s)$ で張られる平面を法平面 という.

定理3.1. フルネー・セレーの公式.

$$\begin{cases} t' = \kappa n \\ n' = -\kappa \cdot t + \tau b \\ b' = -\tau n \end{cases}$$

が成り立つ.

ただし. $\tau(s) = \dfrac{1}{\kappa(s)^2} |r'(s) \ r''(s) \ r'''(s)|$ である.

補題 3つのベクトル関数 a, b, c が単位ベクトルかつ互いに直交するとき.

$$\begin{cases} a' = \omega_3 b - \omega_2 c \\ b' = -\omega_3 a + \omega_1 c \\ c' = \omega_2 a - \omega_1 b \end{cases}$$

とできる.

(∵) $\{a(t), b(t), c(t)\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底になっているので.

$a'(t) = x_1 a(t) + y_1 b(t) + z_1 c(t)$ とできる.

ここで. $a(t)$ との内積をとると.

$0 = x_1 \cdot 1 + y_1 \cdot 0 + z_1 \cdot 0$ より $x_1 = 0$ となる.

∴ $a'(t) = y_1 b(t) + z_1 c(t)$ とできる 同様に

$b'(t) = x_2 a(t) + z_2 c(t)$

$c'(t) = x_3 a(t) + y_3 b(t)$ となる

ここで. $a \cdot b = 0$ を微分すると.

$0 = (a \cdot b)' = a' \cdot b + a \cdot b' = y_1 + x_2$.

∴ $y_1 = -x_2 = \omega_3$ とおく.

同様に、 $b\cdot c=0$ より

$$z_2 = -y_3 = w_1.$$

$a\cdot c=0$ より

$x_3 = -z_1 = w_2$ とおけば、

$$\begin{cases} a' = \ w_3 b - w_2 c \\ b' = -w_3 a + w_1 c \\ c' = w_2 a - w_1 b \end{cases}$$

となる。

<u>定理3.1の証明</u>

まず、 $n = \frac{1}{\kappa} t'$ であったから、

上の補題で $a=t$, $b=n$, $c=b$ と考えれば、

$w_3=\kappa$, $w_2=0$ となる。

さらに $w_1=\tau$ とおくと、

$$\tau = -b'\cdot n = -(t\times n)'\cdot n = -(\overbrace{\boxed{t'\times n}}^{0 = \kappa n\times n} + t\times n')\cdot n$$

$$= -(t\times n')\cdot n = -|t \ \ n' \ \ n| = |t \ \ n \ \ n'|$$

$$= \left|t \quad \frac{1}{\kappa}t' \quad \frac{1}{\kappa}t'' - \frac{\kappa'}{\kappa^2}t'\right|$$ ← $n = \frac{1}{\kappa} t'$ より

$$= \frac{1}{\kappa^2}|t \ \ t' \ \ t''| = \frac{1}{\kappa^2}|r' \ \ r'' \ \ r'''|$$ となる

ここで、 $\kappa(s)$ と $\tau(s)$ をそれぞれ曲線Cの点 $P(s)$ における

曲率および捩率という。

また $\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$ を曲率半径という。

例. $r(t)=(a\cdot\cos t,\ a\sin t,\ bt)$ を定傾曲線というが.

この曲線の $\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{b},\kappa,\tau$ を求めよ.

答. まず. $\dot{r}=(-a\sin t,\ a\cdot\cos t,\ b)$ より

$$s=\int_0^t|\dot{r}|\,dt=\int_0^t\sqrt{a^2+b^2}\,dt=t\cdot\sqrt{a^2+b^2}.$$

以下. $c=\sqrt{a^2+b^2}$ とおく. と. $t=\frac{s}{c}$ より

$r(s)=\left(a\cos\frac{s}{c},\ a\sin\frac{s}{c},\ b\cdot\frac{s}{c}\right)$ である.

$$\mathbf{t}=r'=\left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{b}{c}\right)$$

$$\mathbf{t}'=r''=\left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c},\ -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c},\ 0\right)$$

$$r'''=\left(\frac{a}{c^3}\sin\frac{s}{c},\ -\frac{a}{c^3}\cos\frac{s}{c},\ 0\right)$$ となる

$$\therefore\ \kappa=|r''|=\frac{a}{c^2}$$

$$\tau=\frac{1}{\kappa^2}|r'\ r''\ r'''|=\frac{b}{c^2}$$

$$\mathbf{n}=\frac{1}{\kappa}\mathbf{t}'=\left(-\cos\frac{s}{c},\ -\sin\frac{s}{c},\ 0\right)$$

$$\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n}=\left(\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c},\ -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\right)$$ である

問題. 次の曲線の $\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{b},\kappa,\tau$ を求めよ.

$r(t)=(a\sin t,\ a\cdot\cos t,\ 0)$

答. $\mathbf{t}=\left(\cos\frac{s}{a},\ -\sin\frac{s}{a},\ 0\right)$, $\kappa=\frac{1}{a}$, $\tau=0$

$\mathbf{n}=\left(-\sin\frac{s}{a},\ -\cos\frac{s}{a},\ 0\right)$, $\mathbf{b}=(0,0,1)$ である