ベクトル関数 $A(t)$ の導関数がベクトル関数 $a(t)$ であるとき.

$A(t)$ を $a(t)$ の不定積分または原始ベクトル関数といい.

$A(t) = \int a(t)\,dt$ とかく. 成分で書くと.

$\int a(t)\,dt = \left(\int a_1(t)\,dt,\ \int a_2(t)\,dt,\ \int a_3(t)\,dt \right)$ である.

また. t の区間 $[\alpha, \beta]$ における $a(t)$ の定積分は

$\int_\alpha^\beta a(t)\,dt = \left(\int_\alpha^\beta a_1(t)\,dt,\ \int_\alpha^\beta a_2(t)\,dt,\ \int_\alpha^\beta a_3(t)\,dt \right)$ である.

例. ベクトル関数 $v(t)$ についての微分方程式.

$$\frac{d}{dt}v(t) + P(t)\cdot v(t) = Q(t)$$

を解け. ただし. $P(t)$ は関数, $Q(t)$ はベクトル関数とする.

答. 方程式の成分を考えると. i 番目の成分は $(i=1,2,3)$

$\frac{d}{dt}v_i(t) + P(t)v_i(t) = Q_i(t)$ である.

これは1階線形微分方程式なので.

$v_i = e^{-\int P(t)dt}\cdot\left(\int e^{\int P(t)dt}\cdot Q_i(t)\cdot dt + k_i \right)$ である.

ただし. k_i は定数 ($k=(k_1, k_2, k_3)$ とすれば定ベクトルになる)

$\therefore\ v = e^{-\int P(t)dt}\cdot\left(\int e^{\int P(t)dt}\cdot Q(t)\,dt + k \right)$ である.

問題. 次の微分方程式をとけ. ただし. C は定ベクトルとする.

(1) $v'(t) = C$ (2) $v'(t) + v(t)\cdot\tan t = (\cos t, 0, 0)$

答 (1) i番目の成分は.

$v_i'(t) = C_i$ より. $v_i(t) = t \cdot C_i + k_i$ (k_iは定数) とできる

$\therefore v(t) = t \cdot C + k$ である

(2) 第1成分は.

$v_1'(t) + v_1(t) \cdot \tan t = \cos t$ より

$$v_1(t) = e^{-\int \tan t \, dt} \cdot \left(\int e^{\int \tan t \, dt} \cdot \cos t \, dt + k_1 \right)$$

$$= \cos t \cdot (t + k_1) = t \cdot \cos t + k_1 \cdot \cos t.$$

第2, 3成分は

$v_i'(t) = v_i(t) \cdot \tan t$ より

$v_i(t) = k_i \cdot e^{-\int \tan t \, dt} = k_i \cdot \cos t$ である

$\therefore v(t) = (t \cos t, 0, 0) + k \cdot \cos t$ である.

<u>曲線と運動</u>

曲線 C が ベクトル方程式

$r(t) = \overrightarrow{OP}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ で与えられていたとする.

ここで、各成分が微分可能かつ, 導関数が連続であるとき.

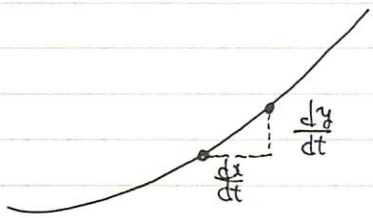
曲線 C は滑らか であるという.

以下出てくる曲線は滑らかであるとしておく.

曲線 C の 1点 $A = P(\alpha)$ から 点 $P(t)$ までの

曲線弧の長さ S は.

$$S(t) = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\ dt$$ で与えられる.



三平方の定理から.

ここで、積分記号の中の関数は. $|r'(t)|$ であるから.

$$S(t) = \int_{\alpha}^{t} |r'(t)|\ dt$$ とも表せる.

さらに $S(t)$ も 微分可能で

$$\frac{d}{dt}S = |r'(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$ とできる.

$\therefore S'(t) \geqq 0$ より. $S(t)$ は 増加関数

$\Rightarrow$ 逆関数 $t = t(S)$ が存在する

すると. $r(t)$ に $t = t(s)$ を代入することで、S についての ベクトル関数とみれる. つまり.

$r(s) = (x(s), y(s), z(s))$ とできる.

この媒介変数 s は 弧長媒介変数 といわれる. また.

$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$ を 線素 という

以後 r の S による微分を $r'(s) = \frac{d}{ds}r(s)$

r の t による微分を $\dot{r}(t) = \frac{d}{dt}r(t)$ と書く

曲線の性質を考えるときは. 主に s を使う

$r'(s) = \dot{r}(t)\cdot\frac{dt}{ds}$ より. $|r'| = |\dot{r}|\cdot\frac{dt}{ds} = 1$ である.

これより. $\mathbb{t} = r'(s) = (x'(s), y'(s), z'(s))$ とおくと.

$\mathbb{t}$ は長さ1の接線ベクトルである. これを C の**単位接線ベクトル**という.

(この節の終りまで $\mathbb{t}$ はこのベクトル関数を表すものとする)

例. 曲線 $r(t) = (a\cdot\cos t, a\sin t, bt)$ の $t=0$ から $t=t$ までの

弧長 s と. 接単位ベクトル $\mathbb{t}$ を求めよ.

答. $\dot{r}(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$ より

$$|\dot{r}| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cdot\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{より}$$

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\,dt = t\cdot\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{となる}$$

$$\mathbb{t} = \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\dot{r}|}\cdot\frac{dr}{dt}$$

$$= \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \quad \text{である}$$

問題. 次の曲線の $t=0$ から $t=t$ までの弧長 s と単位接線ベクトル $\mathbb{t}$ を求めよ.

(1) $r(t) = (2t^3, 3t, 3t^2)$ (2) $r(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$

答 (1). $\dot{r}(t) = (6t^2, 3, 6t)$ より

$$|\dot{r}(t)| = 3\cdot\sqrt{4t^4+4t^2+1} = 3(2t^2+1)$$

$$\therefore s(t) = \int_0^t 3(2t^2+1)\,dt = [2t^3+3t]_0^t = 2t^3+3t$$

$$\mathbb{t} = \frac{1}{|\dot{r}|}\cdot\frac{dr}{dt}$$

$$= \left(\frac{2t^2}{2t^2+1}, \frac{1}{2t^2+1}, \frac{2t}{2t^2+1}\right) \quad \text{である.}$$

(2) $\dot{r}(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$ より

$|\dot{r}(t)| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = e^t + e^{-t}$

$\therefore$ $S(t) = \int_0^t e^t + e^{-t} dt = [e^t - e^{-t}]_0^t = e^t - e^{-t}$ である

$\mathbb{t} = \frac{1}{|\dot{r}(t)|}\dot{r}(t) = \left(\frac{e^t}{e^t+e^{-t}}, \frac{-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}, \frac{\sqrt{2}}{e^t+e^{-t}}\right)$ である

・一般のベクトル関数 $a(t)$ が $|a(t)|$ が一定であれば、$a'(t) \perp a(t)$ である

$\because$ $a \cdot a' = \frac{1}{2}(|a|^2)' = 0$ より、わかる。

これより $\mathbb{t}$ と $\mathbb{t}'$ は $\mathbb{t} \perp \mathbb{t}'$ となることがわかる。

次に $\kappa(s) := |\mathbb{t}'| = |r''| = \sqrt{x'' + y'' + z''}$ とおく。

もし、恒等的に $\mathbb{t}' = r'' = 0$ であれば、

$r = As + B$ となり、Cは直線である。

もし、$\kappa(s) \neq 0$ となる点で、

$n(s) := \frac{1}{\kappa(s)}\mathbb{t}' = \frac{1}{\kappa(s)} r''(s)$ とおけば、

$n(s)$ は単位ベクトルであり、かつ、$n \perp \mathbb{t}$ をみたす。

これを曲線Cの点$P(s)$における単位主法線ベクトルといい、

$\mathbb{t}$ と n により張られる平面を点$P(s)$における接触平面という。