ベクトル関数の微分と積分

変数 t $(\alpha \leqq t \leqq \beta)$ に対し、ベクトル $a(t)$ が定まるとき、

$a(t)$ を ベクトル関数 という。$a(t)$ を成分表示すると、

$a(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ とでき、それぞれの成分は

t の関数とみることができる。

また、全ての t で $a(t) = b$ となるベクトルを 定ベクトル

〃 $|a(t)| = 1$ となるベクトル関数を 単位ベクトル関数

$a(t)$ と $b(t)$ が全ての t で $a(t) \perp b(t)$ となるとき、

2つのベクトル関数は 垂直 または 直交している という

ベクトル関数 $a(t)$ に対し、Δt を t の増分とするとき、

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \{ a(t+\Delta t) - a(t) \} = \frac{d\,a(t)}{dt}$$

が存在するならば、これを $a(t)$ の t における ベクトル微分係数 といい、

$\frac{da(t)}{dt}$, $a'(t)$, $\dot{a}(t)$ で表す。

さらに全ての t で $a'(t)$ が存在するとき、

$a'(t)$ を $a(t)$ の ベクトル導関数 という。

$a(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ がベクトル導関数をもつ

$\Leftrightarrow$ $a_1(t), a_2(t), a_3(t)$ が微分可能

このとき、$a'(t) = (a_1'(t), a_2'(t), a_3'(t))$ である。

高階の微分も同様に定義できる

問題．$a(t)=(\cos t, \sin t, t)$ について．

$a'(t), |a'(t)|, a''(t), |a''(t)|$ をそれぞれ求めよ．

答 $a'(t)=(-\sin t, \cos t, 1)$

$|a'(t)|=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+1}=\sqrt{2}$

$a''(t)=(-\cos t, -\sin t, 0)$

$|a''(t)|=\sqrt{(-\cos t)^2+(-\sin t)^2+0}=1$ である．

変数 t に対し．点 $P(t)=(x(t), y(t), z(t))$ が定まるとき．その位置ベクトル

$r(t)=(x(t), y(t), z(t))$ はベクトル関数になる．

一般に．点 $P(t)$ は．1つの曲線 C をえがく．

$r(t)$ をこの曲線 C のベクトル方程式という

ここで、$r'(t)=(x'(t), y'(t), z'(t))$ は曲線 C の接線の方向ベクトルになるので．

曲線 C の点 $P(t)$ における接線ベクトルという．

また．$r'(t)=0$ となる点を曲線 C の特異点という

見方を変え．$P(t)$ が運動する物だと考えれば．

$v(t)=r'(t)$ は速度ベクトル

$a(t)=r''(t)$ は加速度ベクトル

$|v(t)|$ は速さ となる

定理 2.1. $a(t), b(t), c(t)$ はベクトル関数. k は定ベクトル $f(t)$ は t の関数とすると次が成り立つ

(1) $k' = 0$

(2) $(a(t)+b(t))' = a'(t)+b'(t)$

(3) $(f(t)a(t))' = f'(t)\cdot a(t) + f(t)\cdot a'(t)$

(4) $(a(t)\cdot b(t))' = a'(t)\cdot b(t) + a(t)\cdot b'(t)$, $(|a(t)|^2)' = 2a(t)\cdot a'(t)$

(5) $(a\times b)' = a'\times b + a\times b'$

(6) $|a\ b\ c|' = |a'\ b\ c| + |a\ b'\ c| + |a\ b\ c'|$

∵ (3)〜(6) を示す. ((1)(2) は略)

(3). $(f(t)a(t))' = ((f(t)a_1(t))', (f(t)a_2(t))', (f(t)a_3(t))')$

$$= (f'(t)a_1(t)+f(t)a_1'(t),\ f'(t)a_2(t)+f(t)a_2'(t),\ f'(t)a_3(t)+f(t)a_3'(t))$$

$$= f'(t)\cdot a(t) + f(t)\cdot a'(t)$$

(4). $(a\cdot b)' = (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)'$

$$= a_1'b_1+a_1b_1' + a_2'b_2+a_2b_2' + a_3'b_3+a_3b_3'$$

$$= a'\cdot b + a\cdot b'$$

(5) $(a\times b)' = ((a_2b_3-a_3b_2)', (a_3b_1-a_1b_3)', (a_1b_2-a_2b_1)')$

$$= (a_2'b_3-a_3'b_2,\ a_3'b_1-a_1'b_3,\ a_1'b_2-a_2'b_1)$$

$$+(a_2b_3'-a_3b_2',\ a_3b_1'-a_1b_3',\ a_1b_2'-a_2b_1')$$

$$= a'\times b + a\times b'$$

定理1.5

(6) $|a\ b\ c|' = \{(a\times b)\cdot c\}' = (a\times b)'\cdot c + (a\times b)\cdot c'$

$= (a'\times b)\cdot c + (a\times b')\cdot c + (a\times b)\cdot c'$

$= |a'\ b\ c| + |a\ b'\ c| + |a\ b\ c'|$

問題. $a(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $b(t) = (t, -t^2, t^3)$ について.

$(a\cdot b)'$, $(a\times b)'$ を求めよ.

答 $a'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ $b'(t) = (1, -2t, 3t^2)$ より.

$(a\cdot b)' = a'\cdot b + a\cdot b' = -t\sin t - t^2\cos t + t^3 + \cos t - 2t\cdot\sin t + 3t^3$

$= 4t^3 - t^2\cdot\cos t - 3t\cdot\sin t + \cos t$

$(a\times b)' = a'\times b + a\times b'$

$$= \left(\begin{vmatrix} \cos t & 1 \\ -t^2 & t^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -\sin t \\ t^3 & t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ t & -t^2 \end{vmatrix} \right)$$

$$+ \left(\begin{vmatrix} \sin t & t \\ -2t & 3t^2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} t & \cos t \\ 3t^2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ 1 & -2t \end{vmatrix} \right)$$

$= (t^3\cdot\cos t + 3t^2 + 3t^2\sin t,\ 2t + t^3\sin t - 3t^2\cdot\cos t,$

$t^2\cdot\sin t - 3t\cdot\cos t - \sin t)$ である