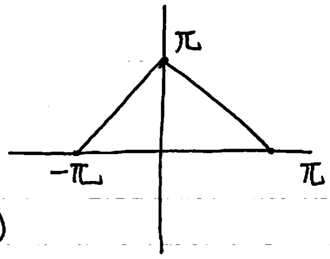
応用数学II - フーリエ解析

フーリエ級数

フーリエ級数は、関数を三角関数の和の形で表したものである。例えば、

$f(x) = \pi - |x|$ (右のグラフ)



という関数は、

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right)$$

という形で表すことができる。

違う見方をすれば、フーリエ級数は、関数を波の形に分解しているともとれる。

これを使えば、例えば、音波や電波から特定の波を取り出すことが可能になる。

準備 講義でよく使う公式・性質 (n, m は自然数)

① $[-a, a]$ 上で定義された関数 $f(x)$ が

偶関数 $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\cdot\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

奇関数 $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

② $\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = 2\pi$

③ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = 0$

④ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot\cos nx\,dx = \begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$

⑤ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot\sin nx\,dx = \begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$

⑥ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot\sin nx\,dx = 0$

問題 (1) ③ を示せ

(2) 公式 $\cos\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right)$ を使い ⑥を示せ

(3) 公式 $\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$ を使い ④を示せ

(4) ⑤を示せ.

答. (1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = \left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx = \left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n}\cos(-n\pi)$

$= -\frac{1}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n}\cos n\pi = 0$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\sin nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x-\sin(m-n)x\right)dx$

ここで $m=n$ なら $\sin(m-n)x=0$, $m\neq n$ なら ③より

与式 $=0$ となる.

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right)dx$.

ここで $m=n$ なら ②と③より 与式 $=\pi$

$m\neq n$ なら ③ より 与式 $=0$

(4) $\sin\alpha\cdot\sin\beta = -\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right)$ より

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x-\cos(m-n)x\right)dx$

ここで $m=n$ なら ②と③ より 与式 $=\pi$

$m\neq n$ なら ③ より 与式 $=0$

フーリエ級数とフーリエ係数.

関数 $f(x)$ が周期 2π であるとする. すなわち $f(x)=f(x+2\pi)$ である.

さらに, $f(x)$ が三角関数の級数で表されているとする. つまり

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos nx+b_n\cdot\sin nx)$$

となっていたとする.

この係数である a_n や b_n を求めるには, 次の計算をすればよい.

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot dx=\pi a_0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos mx\cdot dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos mx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\cdot\cos mx+b_n\cdot\sin nx\cdot\cos mx)dx$$

$$=a_m\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos mx\cdot dx=\pi\cdot a_m$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin mx\cdot dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\sin mx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos nx\cdot\sin mx+b_n\cdot\sin nx\cdot\sin mx)dx$$

$$=b_m\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin mx\cdot dx=\pi\cdot b_m.$$

これらから次がいえる.

定理1.1. 周期 2π の関数 $f(x)$ について.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos nx+b_n\cdot\sin nx)\quad\cdots(*)$$

とできるとき. 係数は.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos nx\,dx\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\qquad(n=1,2,\cdots)$$

で与えられる.

上の $(*)$ の式を $f(x)$ の**フーリエ級数**または**フーリエ展開**といい.

その係数を**フーリエ係数**という.

とくに a_n を**(フーリエ)余弦係数**. b_n を**正弦係数**という

例題. $(-\pi,\pi]$ で次の式で与えられる周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = \pi - |x|$$

答. $f(x)$ は偶関数なので. $f(x)\cdot\sin nx$ は奇関数.

$$\therefore\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx\ dx = 0$$

$f(x)\cdot\cos nx$ は偶関数なので.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\ dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cdot\cos nx\ dx$$

$n=0$ のとき.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\pi - x\ dx = \frac{2}{\pi}\left[\pi x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi} = \pi.$$

$n\neq 0$ のとき

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx\ dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\pi\cdot\cos nx\cdot dx - \int_0^{\pi}x\cdot\cos nx\ dx\right)$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[\pi\cdot\frac{1}{n}\cdot\sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}x\cdot\sin nx\ dx\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx\ dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left[-\frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{\pi}$$

n が偶数. $\Rightarrow$ $a_n = \dfrac{-2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = 0$

n が奇数 $\Rightarrow$ $a_n = \dfrac{-2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = \dfrac{4}{\pi n^2}$

$\therefore\ f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi}\left(\cos x + \dfrac{1}{3^2}\cos 3x + \dfrac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right)$ である.

問題. $(-\pi,\pi]$ で次の式で与えられる周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

(1) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-\pi - x) & (-\pi < x \leqq 0) \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & (0 < x \leqq \pi) \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi < x < 0) \\ 2\cos x & (0 \leqq x \leqq \pi) \end{cases}$

答. (1). $f(x)$は奇関数なので. $f(x)\cdot\cos nx$も奇関数.

$\therefore\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx = 0.$

$f(x)\sin nx$ は偶関数より.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin nx\cdot dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{n}(\pi - x)\cos nx\ dx\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nx\ dx$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{\pi n}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n}$$

$\therefore\ f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots$ である.

(2) $f(x)$は $(-\pi, 0)$ で 0 をとるので.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cdot\cos x\cdot\cos nx\cdot dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n+1)x + \cos(n-1)x\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+1}\sin(n+1)x + \frac{1}{n-1}\sin(n-1)x\right]_0^{\pi} \qquad (n \neq 1\ のとき)$$

$$= 0$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+1}\sin(n+1)x + x\right]_0^{\pi} = 1.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cdot\cos x\cdot\sin nx\cdot dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(1+n)x - \sin(1-n)x\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{1+n}\cos(1+n)x + \frac{1}{1-n}\cos(1-n)x\right]_0^{\pi} \qquad (n \neq 1\ のとき)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-1}{1+n}\left(\cos\pi(n+1)\right)+\frac{1}{1-n}\left(\cos\pi(1-n)x\right)+\frac{1}{1+n}-\frac{1}{1-n}\right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4n}{\pi(n^2-1)} & (n\text{が偶数}) \\ 0 & (n\text{が奇数}) \end{cases}$$ であり

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x \, dx = 0$$ となる.

$$\therefore f(x) = \cos x + \frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{\pi(4n^2-1)}\cdot\sin 2nx$$ となる.