正規分布の再生性

定理15 X_i は $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ に従うとする。また独立であるとする。

このとき $a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$ は

$N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\right)$ に従う。

∵ A.3節をみよ。

例題19，問題24

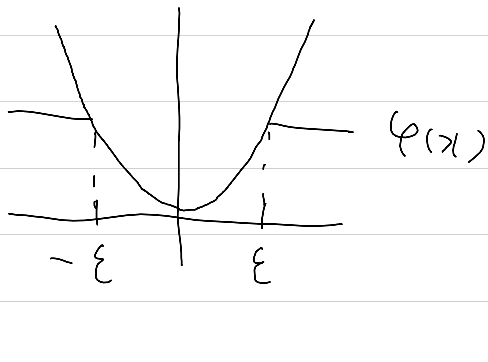
大数の法則

定理16（チェビシェフの不等式） $\forall \varepsilon > 0$ に対し

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E(X^2)$$

∵ 連続型のみ示す。

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & |x| \geq \varepsilon \\ 0 & |x| < \varepsilon \end{cases}$$ とすると



$\varphi(x) \leq \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2$ より

$$P(|X| \geq \varepsilon) = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} p(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} p(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) p(x)\,dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 p(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} E(X^2)$$

//

定理17 (大数の法則)

$X_1, \cdots, X_n$ は独立で $E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = \sigma$ とする.

$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ とすると. $\forall \varepsilon > 0$ に対し.

$$\lim_{n \to \infty} P(|Y_n - \mu| < \varepsilon) = 1.$$ となる.

∵ $i \neq j$ のとき

$$E((X_i - \mu)(X_j - \mu)) = E(X_i X_j) - \mu E(X_i) - \mu E(X_j) + \mu^2$$

$$= 0$$ と

$$Y_n - \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)$$ に注意すると.

$$P(|Y_n-\mu|\geq\varepsilon)\leqq\frac{1}{\varepsilon^2}E((Y_n-\mu)^2)$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}E\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X-\mu)\right)^2\right)=\frac{1}{n^2\varepsilon^2}E\left(\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{n^2\varepsilon^2}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2+2\sum_{i\neq j}(X_i-\mu)(X_j-\mu)\right)$$

$$=\frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n}E((X_i-\mu)^2)=\frac{1}{n^2\varepsilon^2}\cdot n\cdot\sigma^2\longrightarrow 0$$

$$\therefore P(|Y_n-\mu|<\varepsilon)\longrightarrow 1.$$

<u>定理18</u>（中心極限定理）

$X_1,\cdots,X_n$ は独立で $E(X_i)=\mu$, $V(X_i)=\sigma^2$ とする このとき

$$Z_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}$$ の分布関数は

$N(0,1)$ の分布関数に収束する

なお $\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)$ は $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ に収束