同時確率密度関数

X, Y は連続型とする. $D \subset \mathbb{R}^2$ に対し,

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D p(x, y)\,dx\,dy$$

とできるとき, $p(x, y)$ を X, Y の同時確率密度関数という.

とくに $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d p(x, y)\,dy\,dx$ である. また

$$p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\,dy, \quad p_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\,dx$$

をそれぞれ周辺確率密度関数という.

これらは, X, Y の密度関数になっている. 実際

$$\int_a^b p_1(x)\,dx = \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\,dy\,dx$$

$$= P(a \leq X \leq b, -\infty < Y < \infty) = P(a \leq X \leq b)$$

$p(x, y)$ は. $p(x, y) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) = 1$ をみたす.

さらに関数 $\varphi(x, y)$ に対し. $\varphi(X, Y)$ の期待値を

$$E(\varphi(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y)\,p(x, y)\,dx\,dy$$

とする.

定理12.13 も成立.

例16，問21.

独立な確率変数

X, Y が次をみたすとき、X と Y は独立という.

離散：$p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{j\cdot}$

連続：$p(x, y) = p_1(x) \cdot p_2(y)$.

これは $p(X = x_i, Y = y_j) = p(X = x_i) \cdot p(Y = y_j)$ を表している.

例題17，18，問22，23.

定理14：X、Y が独立のとき、次が成立

(1) $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$

(2) $r(X, Y) = \rho(X, Y) = 0$

(3) $V(aX + bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y)$.

つづく

∵ 連続型の場合のみ示す.

$p_1(x)\cdot p_2(y)$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, p(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x\, p_1(x)\,dx\cdot\int_{-\infty}^{\infty} y\, p_2(y)\,dy.$$

$$=E(X)\cdot E(Y)$$

(2) $\gamma(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=0$ $\therefore \rho(X,Y)=0$

(3) $V(aX+bY)=a^2V(X)+2ab\gamma(X,Y)+b^2V(Y)$

$$=a^2V(X)+b^2V(Y)$$ //.

なお、定理14の逆は成立しない.